

學習目標

讀完本章後，你將能夠

- 了解明渠中的流動與管路中被加壓的流動的區別。
- 學到明渠中的不同流動區域及它們的特性。
- 預測流動中是否會發生水躍，並計算水躍時，能量耗散的比率。
- 了解如何使用水閘門及堰來量測明渠中的流動率。



任何具有自由表面的液體流動是明渠流的一種形式。尼可順河彎曲地經過澳州北部。

© Digital Vision/Getty RF

明渠流 (open-channel flow) 意指在對大氣開放的渠道中進行的流動，但是管道中的流動如果液體並沒有完全充滿管道，以致有自由表面也是明渠流。明渠流中的液體 (通常是水或廢水) 只對一種氣體曝露 (通常是空氣，其是在大氣壓力下)。

管中的流動由重力或壓力差驅動，而渠道中的流動自然是由重力驅動的。例如，河中的流水是由上游與下游的高度差所驅動的。一條明渠中的流率是重力與摩擦力之間動力平衡所建立的。液體流動的慣性力在不穩定流中也會變得重要。自由表面與水力坡線 (HGL) 一致，並且沿著自由表面的壓力是常數。但是從渠道底部到自由表面的高度及沿著渠道的流動截面積的所有尺寸並不是事先就知道的——它們會隨著平均流速而改變。

本章我們介紹明渠流的基本原理，以及具有常見截面的渠道中的穩定的一維流動的相關的關係式。詳細的訊息可以從幾本討論這個主題的書中得到，其中一些列在參考資料和建議讀物中。



(a)



(b)

圖 13-1 自然的與人造的明渠流的特徵是具有一個對大氣開放的自由表面。

(a) © Doug Sherman/Geofile RF;
(b) Royalty-Free/CORBIS

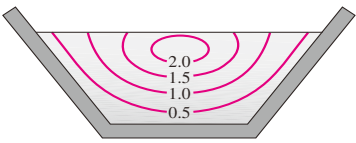


圖 13-2 一個梯形截面的明渠流的典型的軸向速度輪廓圖；數值是相對於平均速度的。

13-1 明渠流的分類

明渠流意指在對大氣開放的渠道中或在部分充滿液體的流道中的流動，其特徵是存在著液體-氣體的介面，稱為自由表面(圖 13-1)。大多數實際上會遭遇到的自然流動，例如小溪、河流及洪水中水的流動，或是高速公路、停車場與屋頂上的雨水的排洩都是明渠流。人造的明渠流系統包括灌溉系統、污水管線、排水溝與邊溝，如何設計這種系統是一個重要的工程應用領域。

在一個明渠中，邊壁與底面上的流速為零，原因是無滑動條件，而渠道截面是對稱的幾何形狀時，最大速度是在中間平面上，並且一般在稍低於自由表面的位置上，如圖 13-2 所示。[由於二次流的關係(即使在很窄的平直渠道中也會發生)，最大軸向速度發生在低於自由表面的位置，通常在 25% 深度的範圍之內。]再者，對大多數的情況，流速在流動方向也會改變。因此，明渠中的速度分佈(即流動)一般是三維的。然而在工程實踐中，方程式通常是用渠道的一個截面上的平均速度寫出來的。因為平均速度只隨流向距離 x 而變， V 是一個一維的變數。一維化讓手算作為一種簡單的方式，以求解真實世界的問題變得可能，因此在本章中我們的討論限制在可以使用一維平均速度的流動上。不管其簡單性，一維的方程式提供了極正確的

的結果，並且在實務中經常被使用。

在渠道壁上的無滑動條件造成速度梯度，並使壁面剪應力 τ_w 沿著溼邊發展出來。在一個給定的截面上，壁面剪應力沿著溼邊變化並對流動造成阻力。這個阻力的大小相依於流體的黏度與壁面上的速度梯度，且會受壁面粗糙度影響。

明渠流也可被分類為穩定的或不穩定的。如果在一個給定的位置上，流動不隨時間而變，就稱為穩定的。在明渠流中一個代表性的量是**流動深度**(flow depth)(或替代地，平均速度)，可能會沿著渠道改變。如果流動深度在沿渠道的任何一個位置上都不隨時間而變，此流動就稱為是穩定的(雖然它從一個位置到另一個位置可以改變)；否則流動就是不穩定的。本章我們只討論穩定流。

均勻流與變速流

明渠流也被分類為均勻的或不均勻的(也稱為變速的)，端視流動深度 y (從渠道底部到自由表面的垂直距離)如何沿著渠道改變而定。如果流動深度(從而平均

速度) 維持不變, 明渠流就稱為**均勻的** (uniform); 否則流動就稱為是**不均勻的**或**變速的** (nonuniform 或 varied), 即指流動深度在流道方向隨著距離而改變。均勻流條件在實務中常見於長而直的渠道段, 且具有等斜率、等粗糙度與等截面積的流動中。

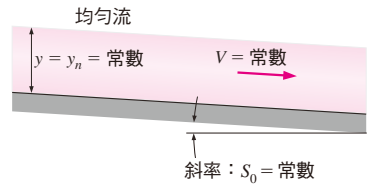


圖 13-3 在一個明渠流的均勻流中, 流動深度與平均流速 V 維持為常數。

在具有等斜率且等截面積的明渠中, 液體加速直到由於摩擦效應的水頭損失等於高度下降量為止。此時液體達到其終端速度, 而均勻流建立起來了。流動維持均勻的, 只要渠道的斜率、截面積與表面粗糙度維持不變。均勻流的流動深度稱為**正常水深** (normal depth) y_n , 其在明渠流中是一個重要的特徵參數 (圖 13-3)。

在明渠中出現的障礙物, 例如一個閘門或在斜率或截面上的變化, 會造成流動深度的改變, 從而使流動變成變速的或不均勻的。這種變速流在自然的或人造的明渠 (例如河流)、灌溉系統與污水管線中都很常見。如果流動深度在流動方向的一個相當短的距離有很明顯的改變, 這種變速流就稱為**急變流** (rapidly varied flow, RVF) (例如水流通過一個部分開啟的閘門或流過瀑布)。如果流動深度在流動方向的一段很長的距離之間逐漸改變, 就稱為**漸變流** (gradually varied flow, GVF)。一個漸變流區域通常發生在急變流與均勻流區域之間, 如圖 13-4 所示。

在漸變流中, 我們可以用一維的平均速度工作, 就像在均勻流中所做的。然而對於急變流, 平均速度並不是最有用或最適當的參數。因此, 急變流的分析是非常複雜的, 特別當流動是不穩定時 (例如岸邊的破浪)。對於一個已知的排放率, 一個指定的明渠流中的一個漸變流區域的流動高度 (即自由表面的高度) 可以從一個流動條件為已知的截面積開始, 用逐步的方法來決定之, 並計算每一步中的水頭損失、高度下降及平均速度。

渠道中的層流與紊流

像管流一樣, 明渠流可以是層流、過渡流或紊流, 視雷諾數的值而定, 雷諾數可表示為

$$Re = \frac{\rho V R_h}{\mu} = \frac{V R_h}{\nu} \quad (13-1)$$

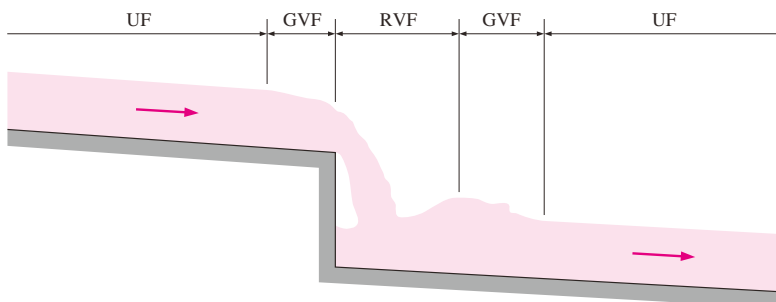


圖 13-4 一個明渠中的均勻流 (UF)、漸變流 (GVF) 與急變流 (RVF)。



圖 13-5 水力半徑與水力直徑的關係可能不是你預期的。

其中 V 是平均液體速度， ν 是運動黏度，而 R_h 是水力半徑 (hydraulic radius) 定義為截面積 A_c 與溼邊長 p 的比。

水力半徑：

$$R_h = \frac{A_c}{p} \quad (m) \quad (13-2)$$

考慮到明渠通常有相當不規則的截面，水力半徑可以作為特徵長度，並且在處理明渠時帶來一致性。同時對於一個明渠的整個均勻的流動段雷諾數是常數。

你可能會預期水力半徑被定義為水力直徑的一半，但不幸的是，情況並非如此。回想管流的水力直徑 D_h 被定義為 $D_h = 4A_c/p$ ，使圓管的水力直徑正好就是圓管直徑。水力半徑與水力直徑的關係是

水力直徑：

$$D_h = \frac{4A_c}{p} = 4R_h \quad (13-3)$$

因此，我們看出來事實上水力半徑是水力直徑的 1/4 而不是 1/2 (圖 13-5)。

所以，一個基於水力半徑的雷諾數是基於水力直徑作為特徵尺寸的雷諾數的 1/4。因此，在管流中當 $Re \leq 2000$ 為層流時，但在明渠流中卻是 $Re \leq 500$ 為層流就不奇怪了。同時，明渠流一般當 $Re \geq 2500$ 時是紊流，而在 $500 \leq Re \leq 2500$ 時是過渡流。層流是當一細層水流 (例如雨水從路面或停車場排洩時) 以低速度流動時會遭遇到。

水在 20°C 的運動黏度是 $1.00 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ，而明渠中的平均流速通常高於 0.5 m/s 。同時，水力半徑一般大於 0.1 m 。因此，明渠中的水流的雷諾數一般會大於 $50,000$ ，使流動幾乎總是紊流的。

注意溼邊包括渠道中與液體接觸的兩邊與底邊，但不包括自由表面，及兩邊與空氣接觸的部分。例如一個矩形渠道，高度 h 、寬度 b 且含水的深度為 y ，其溼邊長與截面積分別為 $p = b + 2y$ ， $A_c = yb$ 。因此，

矩形渠道：

$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{yb}{b + 2y} = \frac{y}{1 + 2y/b} \quad (13-4)$$

作為另一個例子，一個寬度為 b 的停車場，排水深度為 y 時的水力半徑為 (圖 13-6)

深度 y 的液體層：

$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{yb}{b + 2y} \cong \frac{yb}{b} \cong y \quad (13-5)$$

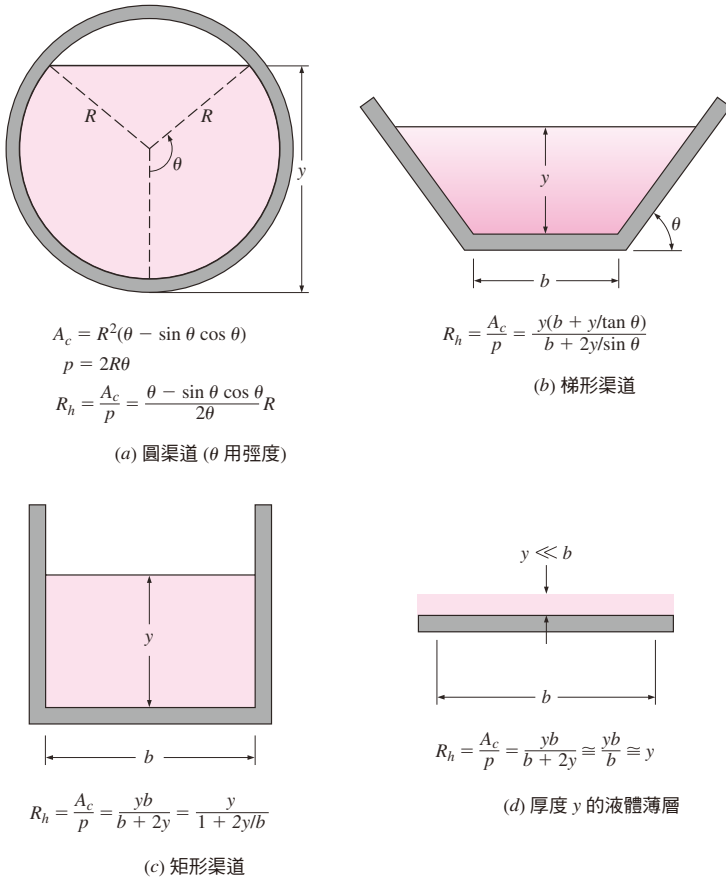


圖 13-6 各種明渠幾何的水力半徑關係式。

因為 $b \gg y$ 。因此一個液體薄層在一個很大表面上的流動的水力半徑簡單地即為液體層的厚度。

13-2 福勞數與波速

明渠流也可分類為次臨界 (subcritical)、臨界 (critical) 或超臨界 (super critical)，端視在第 7 章中定義的無因次的福勞數的數值而定。福勞數定義為

福勞數：

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL_c}} \tag{13-6}$$

其中 g 是重力加速度， V 是在一個截面的平均液體速度，而 L_c 是特徵長度。對寬的矩形渠道， L_c 取為流動深度 y ，因此 $Fr = V/\sqrt{gy}$ 。福勞數是一個重要參數，主宰著明渠流的流動特性。流動可以分類為



$$\begin{aligned}
 Fr < 1 & \quad \text{次臨界流或靜流 (tranquil flow)} \\
 Fr = 1 & \quad \text{臨界流} \\
 Fr > 1 & \quad \text{超臨界流或急變流 (rapid flow)}
 \end{aligned}
 \tag{13-7}$$

可壓縮流	明渠流
$Ma = V/c$	$Fr = V/c_0$
$Ma < 1$ 次音速流 $Ma = 1$ 音速流 $Ma > 1$ 超音速流	$Fr < 1$ 次臨界流 $Fr = 1$ 臨界流 $Fr > 1$ 超臨界流
$V =$ 音速 $c = \sqrt{kRT} =$ 聲速 (理想氣體) $c_0 = \sqrt{gy} =$ 波速 (液體)	

圖 13-7 可壓縮流中的馬赫數與明渠流中福勞數之間的相似性。

這類似可壓縮流中相對於馬赫數的分類：對於 $Ma < 1$ 為次音速；對於 $Ma = 1$ 為音速，及對於 $Ma > 1$ 為超音速 (圖 13-7)。的確，福勞數的分母有速度的因次，它代表微小擾動在靜止液體中移動的速度 c_0 ，這是本節稍後要證明的。因此類似於馬赫數，福勞數代表流速對波速之比， $Fr = V/c_0$ ，就像馬赫數代表流速對音速之比， $Ma = V/c$ 。

福勞數也代表慣性力 (或動力) 對重力 (或重量) 之比的平方根。這可以藉由將福勞數平方 V^2/gL_c 的分子與分母都乘以 ρA 來說明，其中 ρ 是密度， A 是代表性面積，這給出

$$Fr^2 = \frac{V^2 \rho A}{gL_c \rho A} = \frac{2(\frac{1}{2}\rho V^2 A)}{mg} \propto \frac{\text{慣性力}}{\text{重力}}
 \tag{13-8}$$

其中 $L_c A$ 代表體積， $\rho L_c A$ 是此流體體積的質量，而 mg 是重量，分子是慣性力 $\frac{1}{2}\rho V^2 A$ 的兩倍，其可被想成是動壓 $\frac{1}{2}\rho V^2$ 乘以截面積 A 。因此，明渠中的流動，當福勞數大的時候由慣性力主宰，當福勞數小的時候則由重力主宰。

因此在低流速時 ($Fr < 1$)，小擾動向上游移動 (相對於一個靜止觀察者以速度 $c_0 - V$) 並影響上游的條件，此稱為次臨界流或靜流；但是當高流速時 ($Fr > 1$)，小擾動不能向上游移動 (事實上，此波動以相對於一個靜止觀察者的速度 $V - c_0$ 被沖向下游)，上游的條件無法被下游的條件所影響，此稱為超臨界流或急變流。此種情況的流動被上游的條件所控制。因此一個表面波當 $Fr < 1$ 時向上游移動；當 $Fr > 1$ 時被沖向下游；而當 $Fr = 1$ 時似乎是在表面上凍住了。再者，當水深相對於擾動的波長是淺的時候，表面波的速度隨著流動深度 y 而增加，因此一個表面擾動在深渠道中傳播的速度較在淺渠道中快上許多。

考慮一個液體以體積流率 \dot{V} 在一個截面積 A_c 的矩形明渠道中的流動，當流動是臨界的時候， $Fr = 1$ ，且其平均速度為 $V = \sqrt{gy_c}$ ，其中 y_c 是臨界深度 (critical depth)。注意 $\dot{V} = A_c V = A_c \sqrt{gy_c}$ ，臨界深度可被表示為

臨界深度 (一般)：

$$y_c = \frac{\dot{V}^2}{gA_c^2}
 \tag{13-9}$$

對一個寬度 b 的矩形渠道，我們有 $A_c = by_c$ ，因此臨界深度關係式簡化成

臨界深度 (矩形) :
$$y_c = \left(\frac{V^2}{gb^2} \right)^{1/3} \quad (13-10)$$

對於次臨界流，液體的深度 $y > y_c$ ；對於超臨界流，則是 $y < y_c$ (圖 13-8)。

就像在可壓縮流中一樣，一個液體可以從次臨界流加速到超臨界流。當然，也可以從超臨界流減速到次臨界流，並且可經歷一個震波來做到。在此情況的震波被稱為**水躍 (hydraulic jump)**，它對應到可壓縮流中的正震波。因此，明渠流與可壓縮流的相似性是很顯著的。

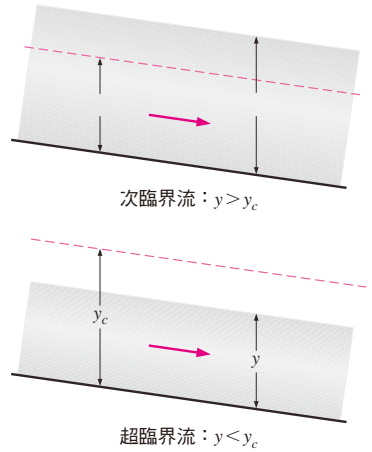
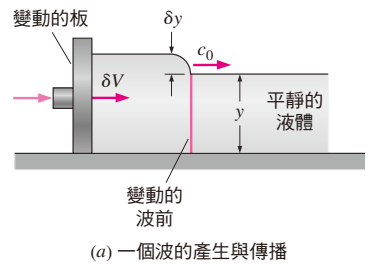


圖 13-8 用臨界深度來定義的次臨界流與超臨界流。

表面波的速度

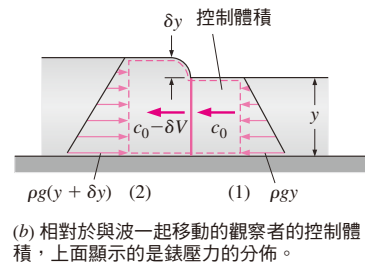
我們都熟悉在海洋、湖泊、河流，甚至在游泳池的自由表面上形成的水波。表面可以很高，像我們在海洋中見到的，也有剛好可以察覺的。有些表面是平滑的，有些表面是破碎的。對波運動的基本了解在研究明渠流的某些方面是必須的。這裡我們只提出一個簡潔的描述。波運動的比較詳細地處理可以從許多描寫這個主題的書裡發現。

研究明渠流時一個重要的參數是波速 (wave speed) c_0 ，這是一個表面擾動在液體中移動的速度。考慮一個長且寬的渠道，開始時包含一個高度為 y 的靜止液體。渠道的一端被以速度 δV 移動，產生了一個高度 δy 的表面波以速度 c_0 朝向靜止液體傳播，如圖 13-9a 所示。



(a) 一個波的產生與傳播

現在考慮一個圍繞著波前的控制體積並隨著它移動，如圖 13-9b 所示。對一個隨著波前移動的觀察者而言，其右邊的液體似乎以速度 c_0 流向波前，而其左邊的液體似乎是以速度 $c_0 - \delta V$ 離開波前。當然觀察者會認為圍繞波前 (包括他自己) 的控制體積似乎是靜止的，並且他看到的是一個穩定流過程。



(b) 相對於與波一起移動的觀察者的控制體積，上面顯示的是錶壓力的分佈。

圖 13-9 在一個明渠中，一個波的產生與分析。

對這個寬度 b 的控制體積的穩定流，其質量守恆 $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ (或連續方程式) 可以被表示為

$$\rho c_0 y b = \rho (c_0 - \delta V) (y + \delta y) b \quad \rightarrow \quad \delta V = c_0 \frac{\delta y}{y + \delta y} \quad (13-11)$$

我們做以下的近似：(1) 速度在跨過渠道方向幾乎是常數，因此動量通量修正因子 (β_1 與 β_2) 為 1；(2) 跨過波的距離很短，因此底面的摩擦力與頂面的空氣阻

力都是可忽略的；(3) 動力效應可以忽略，因此液體中的壓力是靜水力分佈的， $P_{1, \text{avg}} = \rho g h_{1, \text{avg}} = \rho g(y/2)$ 與 $P_{2, \text{avg}} = \rho g h_{2, \text{avg}} = \rho g(y + \delta y)/2$ ；(4) 質量流率是常數，即 $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \rho c_0 y b$ ；與 (5) 沒有外力或物體力，因此作用在控制體積的水平 x - 方向的唯一力量是壓力。動量方程式 $\sum \vec{F} = \sum_{\text{out}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{in}} \beta \dot{m} \vec{V}$ 在 x - 方向變成靜水壓力與動量傳遞之間的平衡，

$$P_{2, \text{avg}} A_2 - P_{1, \text{avg}} A_1 = \dot{m}(-V_2) - \dot{m}(-V_1) \quad (13-12)$$

注意進口與出口平均速度兩者都是負的，因為它們是在負 x - 方向。代入，

$$\frac{\rho g(y + \delta y)^2 b}{2} - \frac{\rho g y^2 b}{2} = \rho c_0 y b (-c_0 + \delta V) - \rho c_0 y b (-c_0) \quad (13-13)$$

或，

$$g \left(1 + \frac{\delta y}{2y} \right) \delta y = c_0 \delta V \quad (13-14)$$

結合動量和連續關係式，並重新整理得到

$$c_0^2 = g y \left(1 + \frac{\delta y}{y} \right) \left(1 + \frac{\delta y}{2y} \right) \quad (13-15)$$

因此，波速 c_0 與波高度 δy 成正比。對於無限小的表面波， $\delta y \ll y$ ，因此

無限小的表面波：
$$c_0 = \sqrt{g y} \quad (13-16)$$

因此，無限小的表面波的速度正比於液體深度的平方根。再一次注意這個分析只對淺液體物體有效，例如在明渠中遭遇到的；否則，深液體物體的波速與深度是無關的，例如海洋。波速也可以用能量平衡關係式來決定以代替用動量方程式與連續方程式的結合。注意波最後會因為黏性效應而消失，這在分析中是被忽略的。同時，對於在非矩形截面的渠道中的流動，水力深度 (hydraulic depth) (定義為 $y_h = A_c/L_t$ ，其中 L_t 是流動段的上部寬度) 應該代替流動深度被使用在福勞數的計算中。例如，對一個半滿的圓形渠道，水力深度為 $y_h = (\pi R^2/2)/2R = \pi R/4$ 。

我們從經驗知道，當一塊石頭被丟進湖裡時，形成的同心水波向所有方向均勻的傳播並且在一段距離後消失了。但是當石頭被丟進一條河流時，如果流動是靜流或次臨界流 ($V < c_0$)，波的上游側向上游移動；但如果流動是急流或超臨界流 ($V > c_0$) 則向下游移動；而在流動是臨界流時 ($V = c_0$)，波在其產生的位置維持是靜止的。

你可能會奇怪，為什麼我們對流動是次臨界的或超臨界的這麼關心。原因是流動的特性，強烈受到此現象影響。例如，一塊在河床上的岩石，可能造成在那個位置的水面高度上升或下降，視流動是次臨界的或超臨界的而定。同時，在次臨界流中，液體的高度在流動的方向逐漸下降，但是在超臨界流中 ($Fr > 1$)，當流動減速至次臨流時 ($Fr < 1$)，液體高度會有一個突然的上升，稱為水躍。

這個現象可以在一個水閘門的下游發生，如圖 13-10 所示。液體以次臨界速度接近水閘門，但是上游液體的高度夠高，當其經過閘門時 (就像氣體在一個收縮-擴張噴嘴中流動一樣)，會被加速至超臨界的水準。但如果渠道下游段的坡度向下程度不夠，就不能夠維持這個超臨界速度，使得液體躍升至一個較高的水位並有較大的截面積，從而得到一個較低的次臨界速度。最後，在河流、運河與灌溉系統中的流動一般都是次臨界的。但是經過水閘門與溢洪道的流動一般是超臨界的。

下次你洗盤子時，你可以創造一個漂亮的水躍 (圖 13-11)。讓水龍頭的水衝擊餐盤的中央。當水向外徑向地流出去時，其深度減小了，並且流動是超臨界的。終於，一個水躍產生了，你可以從突然的水深增加看到這個現象。試試看吧！

13-3 比能量

考慮液體在渠道中流動，在一個截面的流動深度是 y 的位置，平均速度是 V ，而渠道底部相對於某個基準參考平面是 z 。為簡單起見，我們忽略液體速度在截面上的變化，並假設每個地方的速度都是 V 。渠道中這個液體的總機械能可以用水頭表示為 (圖 13-12)

$$H = z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = z + y + \frac{V^2}{2g} \quad (13-17)$$

其中 z 是高度水頭， $P/\rho g = y$ 是錶壓水頭，而 $V^2/2g$ 是速度或動力水頭。總能量如式 (13-17) 所表示的並不是一個流動流體的真實能量的一個寫實的表示，因參考基準面的選擇，從而使得高度水頭的值是相當隨意的。如果渠道的底面被取為參考基準面使那裡成為 $z = 0$ 的位置，流體在一個截面的內在能量可以更真實地被表示，那麼流體的總機械能用水頭表示變成是壓力水頭與動力水頭的總和。一個明渠中的

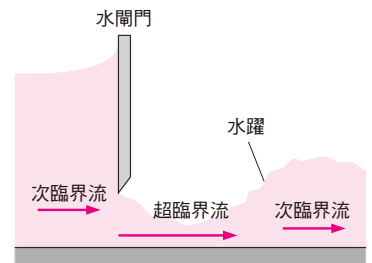


圖 13-10 經過一個水閘門的超臨界流動。



(a)



(b)

圖 13-11 當 (a) 餐盤正面向上時，可以在餐盤上看到一個水躍，但是當 (b) 餐盤正面向下時則不能看到。Photos by Abel Po-Ya Chuang. Used by permission.

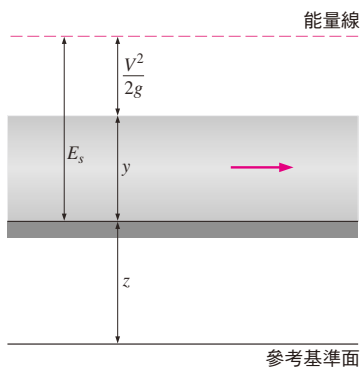


圖 13-12 明渠中液體的比能量 E_s 是相對於渠道底部的總機械能 (用水頭表示)。

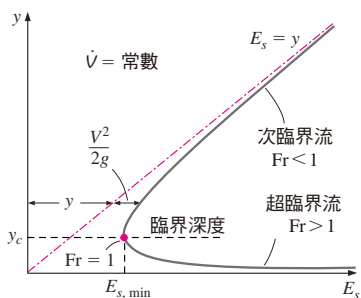


圖 13-13 在一個指定流率下，比能量 E_s 相對於深度 y 的變化。

流體的壓力與動力水頭的總和稱為比能量 (specific energy) E_s ，並且被表示為 (Bakhmeteff, 1932)

$$E_s = y + \frac{V^2}{2g} \quad (13-18)$$

如圖 13-12 所示。

考慮在一個矩形截面的明渠中的流動，其寬度 b 為常數。體積流率是 $\dot{V} = A_c V = ybV$ ，平均流速是

$$V = \frac{\dot{V}}{yb} \quad (13-19)$$

代入式 (13-18)，比能量變成

$$E_s = y + \frac{\dot{V}^2}{2gb^2y^2} \quad (13-20)$$

這方程式很具有教育性，因為它顯示出比能量隨流動深度的變化。在一個明渠的穩定流中，流率是常數，且在 V 與 b 為常數下， E_s 相對於 y 的變化示於圖 13-13 中。從此圖我們觀察到以下幾點：

- 從垂直的 y - 軸上的一點到曲線的距離代表在那個 y - 值的比能量。從 $E_s = y$ 的線到曲線的部分對應流體的動力水頭 (或動水頭)，而剩下的部分代表壓力水頭 (或位能水頭)。
- 當 $y \rightarrow 0$ 時，比能量趨近無限大 (由於速度趨近無限大)，而當 y - 值很大時，比能量變成等於流動深度 (因為速度，從而是動能，變成很小)。比能量在某個中間值達到一個最小值，稱為臨界點 (critical point)，特徵是臨界深度 (critical depth) y_c ，與臨界速度 (critical velocity) V_c 。最小的比能量也稱為臨界能量 (critical energy)。
- 有一個最小的比能量 $E_{s, \min}$ 需要用來支撐指定的流率 \dot{V} 。因此對於一個給定的 \dot{V} ， E_s 不能夠低於 $E_{s, \min}$ 。
- 一條水平線與比能量曲線僅在一點相交，因此一個固定的流動深度對應到一個固定的比能量。這是預期的，因為當 \dot{V} 、 b 與 y 被指定時，速度只能有一個固定值。然而，對於 $E_s > E_{s, \min}$ ，一條垂直線與曲線相交於兩點，顯示一個流動可以有兩個不同的深度 (因此兩個不同的速度) 對應到比能量的一個固定

值。這兩個深度稱為交替深度 (alternate depths)。對於通過一個水閘門的流動，忽略摩擦損失 (因此 $E_s = \text{常數}$)，上面的深度對應上游的流動，而下面的深度對應下游的流動 (圖 13-14)。

- 靠近臨界點時，比能量的一個微小改變會造成交替深度之間的大差異，並且可能造成流動高度的劇烈擾動。因此在設計明渠流時，應該儘量避免靠近臨界點的操作。

發生最小比能量與臨界深度的值可以把式 (13-20) 中的 E_s 在 b 與 \dot{V} 為常數下對 y 作微分，並令微分為零來決定：

$$\frac{dE_s}{dy} = \frac{d}{dy} \left(y + \frac{\dot{V}^2}{2gb^2y^2} \right) = 1 - \frac{\dot{V}^2}{gb^2y^3} = 0 \quad (13-21)$$

解出 y ，其為臨界深度 y_c ，得到

$$y_c = \left(\frac{\dot{V}^2}{gb^2} \right)^{1/3} \quad (13-22)$$

在臨界點的流率可以被表示為 $\dot{V} = y_c b V_c$ ，代入可以求得臨界速度為

$$V_c = \sqrt{gy_c} \quad (13-23)$$

此即為波速。此點的福勞數是

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gy}} = \frac{V_c}{\sqrt{gy_c}} = 1 \quad (13-24)$$

指出最小比能量的點的確是臨界點，並且當比能量達到其最小值時，流動變成臨界的。

流動在較低流速，即較高流動深度 (圖 13-13 的曲線的上臂) 時是次臨界的；在較高流速，即較低流動深度 (曲線的下臂) 時是超臨界的；而在臨界點 (最小比能量的點) 是臨界的。

注意 $V_c = \sqrt{gy_c}$ ，最小的 (或臨界的) 比能量可以僅用臨界深度來表示為

$$E_{s, \min} = y_c + \frac{V_c^2}{2g} = y_c + \frac{gy_c}{2g} = \frac{3}{2}y_c \quad (13-25)$$

在均勻流中，流動深度、流速及比能量維持為常數，因為 $E_s = y + V^2/2g$ 。水頭

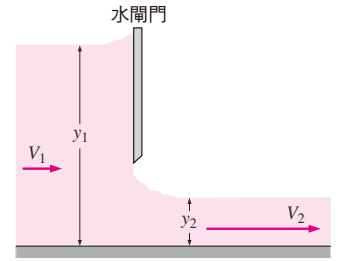


圖 13-14 一個水閘門說明交替深度——水閘門上游較深的液體與水閘門下游較淺的液體。

損失由高度的下降彌補 (渠道在流動的方向向下傾斜)。然而，在不均勻流中，比能量可能增加或減小，端視渠道斜率與摩擦損失而定。例如，若跨過一個流段的高度下降大於那一段的水頭損失，比能量增加的量等於高度下降量與水頭損失的差異量。比能量的觀念在研究變速流時是一個特別有用的工具。

例題 13-1 流動與交替深度的特徵

水穩定地在一個 0.4 m 寬的矩形渠道中以流率 $0.2 \text{ m}^3/\text{s}$ 流動 (圖 13-15)。如果流動深度是 0.15 m，試求流速並決定流動到底是次臨界的或超臨界的。同時決定當流動特徵改變時的交替深度。

解答：考慮水在矩形渠道中的流動。要決定流動特徵、流速與交替深度。

假設：比能量是常數。

解析：平均流速如下決定：

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{yb} = \frac{0.2 \text{ m}^3/\text{s}}{(0.15 \text{ m})(0.4 \text{ m})} = 3.33 \text{ m/s}$$

這個流動的臨界深度是

$$y_c = \left(\frac{\dot{V}^2}{gb^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{(0.2 \text{ m}^3/\text{s})^2}{(9.81 \text{ m/s}^2)(0.4 \text{ m})^2} \right)^{1/3} = 0.294 \text{ m}$$

因此，流動是超臨界的，因為實際的流動深度是 $y = 0.15 \text{ m}$ 且 $y < y_c$ 。另一種決定流動特徵的方法是計算福勞數，

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gy}} = \frac{3.33 \text{ m/s}}{\sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2)(0.15 \text{ m})}} = 2.75$$

再一次確定流動是超臨界的，因為 $\text{Fr} > 1$ 。在給定條件下的比能量是

$$E_{s1} = y_1 + \frac{\dot{V}^2}{2gb^2y_1^2} = (0.15 \text{ m}) + \frac{(0.2 \text{ m}^3/\text{s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)(0.4 \text{ m})^2(0.15 \text{ m})^2} = 0.7163$$

然後交替深度可以從 $E_{s1} = E_{s2}$ 來決定，

$$E_{s2} = y_2 + \frac{\dot{V}^2}{2gb^2y_2^2} \rightarrow 0.7163 \text{ m} = y_2 + \frac{(0.2 \text{ m}^3/\text{s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)(0.4 \text{ m})^2y_2^2}$$

解出 y_2 就得到交替深度為 $y_2 = 0.69 \text{ m}$ 。因此如果流動特徵從超臨界變成次臨界，並維持比能量為常數時，流動深度會從 0.15 m 上升至 0.69 m。

討論：注意如果水在等比能量下經歷一個水躍 (動能損失等於位能增加)，流動深度會上升至 0.69 m，前提是渠道邊壁要有足夠高度。

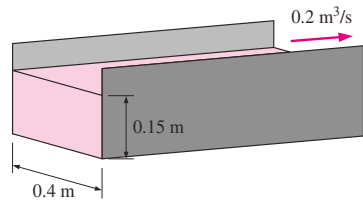


圖 13-15 例題 13-1 的示意圖。

13-4 質量與能量守恆方程式

明渠流牽涉到的液體，其密度幾乎是常數，因此一維穩定流的質量守恆方程式被表示為

$$\dot{V} = A_c V = \text{常數} \quad (13-26)$$

也就是流動的截面積與平均流速的乘積在整個渠道中維持為常數。式 (13-26) 在沿著流道的兩個截面間可以表示為

連續方程式：
$$A_{c1} V_1 = A_{c2} V_2 \quad (13-27)$$

其與管中液體穩定流的質量守恆方程式是相同的。注意流動截面積與平均流速兩者在流動中都可能改變，但是其乘積維持為常數。

為了決定在明渠中流動的液體相對於一個參考基準面的總能量，如圖 13-16 所示，考慮液體中與自由表面的距離是 a 的一點 A (因此距離渠道底面的距離為 $y - a$)。注意在點 A 的高度、壓力 (相對於自由表面的靜水壓) 與速度分別是 $z_A = z + (y - a)$ 、 $P_A = \rho g a$ 與 $V_A = V$ ，液體的總能量用水頭來表示是

$$H_A = z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} = z + (y - a) + \frac{\rho g a}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = z + y + \frac{V^2}{2g} \quad (13-28)$$

其與點 A 在截面上的位置是無關的。因此，明渠中的液體在任何截面上的總機械能可以用水頭表示為

$$H = z + y + \frac{V^2}{2g} \quad (13-29)$$

其中 y 是流動深度， z 是渠道底面的高度，而 V 是平均流速。一個明渠流在上游截面 1 與下游截面 2 的一維能量方程式可以寫成

能量方程式：
$$z_1 + y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L \quad (13-30)$$

由於摩擦效應的水頭損失 h_L 在管流中被表示為

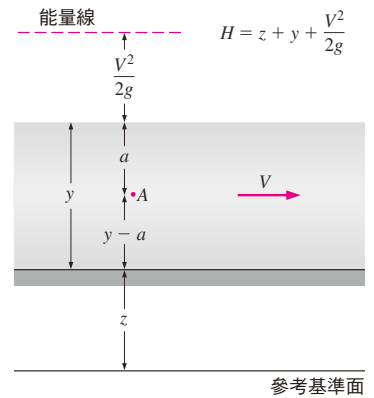


圖 13-16 一個液體在明渠中流動的總能量。

$$h_L = f \frac{L}{D_h} \frac{V^2}{2g} = f \frac{L}{R_h} \frac{V^2}{8g} \quad (13-31)$$

其中 f 是平均摩擦因子且 L 是截面 1 與 2 之間的渠道長度。當使用水力半徑代替水力直徑時，應該注意關係式 $D_h = 4R_h$ 。

明渠中的流動是重力驅動的，因此典型的渠道是稍微傾斜向下的。渠道底部的斜率被表示為

$$S_0 = \tan \alpha = \frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1} \cong \frac{z_1 - z_2}{L} \quad (13-32)$$

其中 α 是渠道底面與水平面之間的角度。一般而言，底面的斜率非常小，渠道底面幾乎是水平面的。因此 $L \cong x_2 - x_1$ ，其中 x 是在水平方向的距離。同時，流動深度 y 是沿著垂直方向作量測的，但是可以取作為垂直於底面的深度，其誤差是可忽略的。

如果渠道底面是直的，使得底面斜率是常數，則截面 1 與 2 之間的垂降距離可以被表示為 $z_1 - z_2 = S_0 L$ 。能量方程式 (13-30) 變成

能量方程式：

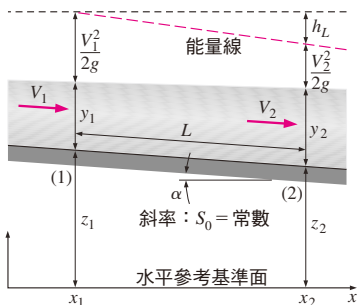
$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + S_0 L = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L \quad (13-33)$$

這個方程式的好處是對於高度它是與參考基準面無關的。

在設計明渠系統時，底面斜率的選擇必須能夠提供適當的高度差來克服摩擦水頭損失，使流動得以維持在想要的流率下。因此，水頭損失與底面斜率之間有密切的關聯，使得把水頭損失用一個斜率 (或一個角度的正切) 來表示就顯得是合理的。這可以定義一個摩擦斜率 (friction slope) 來達成，

摩擦斜率：

$$S_f = \frac{h_L}{L} \quad (13-34)$$



因此能量方程式被寫成

能量方程式：

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + (S_f - S_0)L \quad (13-35)$$

注意當水頭損失等於高度下降時，摩擦斜率等於底面斜率。也就是當 $h_L = z_1 - z_2$ 時， $S_f = S_0$ 。

圖 13-17 也顯示出能量線，其為水平基準面之上距離 $z + y + V^2/2g$ 的地方 (液體的總機械能用水頭表示)。典型的能

圖 13-17 一個明渠中的液體在兩個截面之間的總能量。

量線像渠道本身是傾斜向下的，這是摩擦損失的結果，其垂降距離等於水頭損失 h_L ，因此其斜率與摩擦斜率相同。注意如果沒有水頭損失，能量線會是水平的，即使當渠道不是水平時亦是。在此情況下，高度與速度水頭 ($z + y$ 與 $V^2/2g$) 將能夠互相轉換，但是它們的加總會維持是常數。

13-5 渠道中的均勻流

我們在 13-1 節中提到流動深度 (因此是平均流速，因為在穩流時， $\dot{V} = A_c V =$ 常數) 維持是常數的渠道流稱為均勻流。均勻流在實際中通常發生在一個長而直的渠道上，具有等斜率、等截面積、等渠道截面與內襯之中。在設計明渠時，非常希望系統的大部都能夠是均勻流，因為這表示渠道會有等壁面高度，這會比較容易設計與建造。

均勻流中的流動深度稱為正常深度 (normal depth) y_n ，而其平均速度稱為均勻流速 (uniform-flow velocity) V_0 。只要渠道的斜率、截面積與表面粗糙度維持不變，流動就維持是均勻的 (圖 13-18)。當底面的斜率增加時，流速增加而流動深度減小。因此，一個新的均勻流，具有新的 (較低的) 流動深度被建立起來了。如果底面的斜率被減小時，會發生相反的現象。

在一個具有等斜率 S_0 、等截面積 A_c 及等表面摩擦因子的明渠中，當水頭損失等於高度下降時就建立了均勻流。因此，

$$h_L = f \frac{L}{D_h} \frac{V^2}{2g} \quad \text{或} \quad S_0 L = f \frac{L}{R_h} \frac{V_0^2}{8g} \quad (13-36)$$

因為在均勻流中， $h_L = S_0 L$ 且 $D_h = 4R_h$ 。從第二個關係式求解均勻流速 V_0 並決定流率可得

$$V_0 = C \sqrt{S_0 R_h} \quad \text{與} \quad \dot{V} = C A_c \sqrt{S_0 R_h} \quad (13-37)$$

其中

$$C = \sqrt{8g/f} \quad (13-38)$$

稱為**蔡希係數** (Chezy coefficient)。式 (13-37) 與係數 C 的命名是為紀念法國工程師蔡希 (Antoine Chezy, 1718-1798)，他在約 1769 年提出了一個相似的關係式。蔡希係數是一個有因次的量，其值從有粗糙表面的小渠道的 $30 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ 到有光滑表面的大渠道的 $90 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ 。

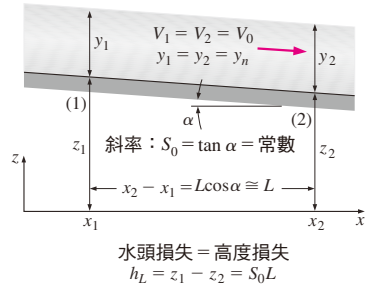


圖 13-18 在均勻流中，流動深度 y 、平均流速 V 及底面斜率 S_0 都維持為常數，並且水頭損失等於高度損失， $h_L = z_1 - z_2 = S_0 L$ 。

蔡希係數可以用一種直接的方式從式 (13-38) 來決定。首先決定摩擦因子 f ，像在第 8 章中對管流所做的一樣，即從穆迪圖或對於完全粗糙的紊流 ($Re \rightarrow \infty$)，用科爾布魯克方程式，

$$f = [2.0 \log(14.8R_h/\varepsilon)]^{-2} \quad (13-39)$$

其中， ε 是平均表面粗糙度。注意明渠流一般是紊流，並且在均勻流建立的時候，流動是完全發展的。因此，使用完全發展的紊流的摩擦因子關係式是合理的。同時，在大雷諾數時，相對粗糙度所對應的摩擦因子曲線幾乎是水平的，因此摩擦因子與雷諾數無關。這個區域的流動稱為完全粗糙紊流 (fully rough turbulent flow) (第 8 章)。

自從蔡希方程式被導入以後，許多研究者已經貢獻了可觀的努力來開發給平均速度和流率更簡單的經驗式。最廣被使用的方程式是由法國人果克勒 (Philippe-Gaspard Gauckler, 1826-1905) 在 1868 年與愛爾蘭人曼寧 (Robert Manning, 1816-1897) 在 1889 年發展出來的。

果克勒與曼寧兩人都建議蔡希方程式中的常數可以表示為

$$C = \frac{a}{n} R_h^{1/6} \quad (13-40)$$

其中 n 稱為曼寧係數 (Manning coefficient)，其值相依於渠道面的粗糙度。將其代入式 (13-37) 中得到以下的經驗式稱為曼寧方程式 (Manning equations)，也稱為果克勒-曼寧方程式 (Gauckler-Manning equations)，因為它們最先是果克勒提出的。此方程式所給的均勻流速度與流率為，

均勻流：

$$V_0 = \frac{a}{n} R_h^{2/3} S_0^{1/2} \quad \text{與} \quad \dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} \quad (13-41)$$

因子 a 是有因次的常數，其 SI 單位的值為 $a = 1 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ 。注意 $1 \text{ m} = 3.2808 \text{ ft}$ ，因此其英制單位的值為

$$a = 1 \text{ m}^{1/3}/\text{s} = (3.2808 \text{ ft})^{1/3}/\text{s} = 1.486 \text{ ft}^{1/3}/\text{s} \quad (13-42)$$

注意底面斜率 S_0 與曼寧係數 n 是無因次參數，並且當 R_h 用 m 表示時，式 (13-41) 給出 SI 單位為 m/s 的速度與單位為 m^3/s 的流率。

對於許多自然的與人工的渠道，實驗決定的 n 的值被給在表 13-1 中。更廣泛的表可以在文獻中找到。注意 n 的值從給玻璃渠道的 0.010 變化到給長滿樹木的氾濫平原的 0.150 (是玻璃渠道的 15 倍)。在 n 的值中有可觀的不確定性，特別是在自然渠道中，正如你所預期的，因為沒有兩個渠道完全相同，其散佈可以達 20%

或更多。無論如何，係數 n 被近似為與渠道的大小與形狀無關——它只隨表面粗糙度而變。

臨界均勻流

通過明渠中的流動當福勞數 $Fr = 1$ 時變成臨界流，並且其流速等於波速 $V_c = \sqrt{gy_c}$ ，其中 y_c 是臨界深度，之前定義於式 (13-a)。當體積流率 \dot{V} 、渠道斜率 S_0 與曼寧係數 n 為已知時，正常深度 y_n 可以用曼寧方程式決定 [式 (13-41)]。然而，因為 A_c 與 R_h 兩者都是 y_n 的函數，此方程式變成對 y_n 是隱式的並且需要用數值方法 (或試誤法) 來求解。如果 $y_n = y_c$ ，此流動是均勻的臨界流，且在這種情況下底面斜率 S_0 等於臨界斜率 S_c 。當流動深度 (而不是流率 \dot{V}) 為已知時，流率可用曼寧方程式來決定，並用式 (13-9) 決定臨界深度。再者，只有當 $y_n = y_c$ 時流動才是臨界的。

當均勻臨界流時， $S_0 = S_c$ 且 $y_n = y_c$ 。將曼寧方程式中的 \dot{V} 與 S_0 分別用 $\dot{V} = A_c \sqrt{gy_c}$ 與 S_c 來替換，並解出 S_c ，就得到以下給臨界斜率的一般式，

臨界斜率 (一般式) :

$$S_c = \frac{gn^2 y_c}{a^2 R_h^{4/3}} \quad (13-43)$$

對於薄膜流，或在一個寬矩形渠道中的流動， $b \gg y_c$ ，式 (13-43) 簡化為

臨界斜率 ($b \gg y_c$) :

$$S_c = \frac{gn^2}{a^2 y_c^{1/3}} \quad (13-44)$$

這個方程式給出在一個寬的矩形渠道，其曼寧係數為 n ，要維持深度 y_c 的臨界流所需要的斜率。

非均勻周長的疊加法

大多數自然的與一些人造的渠道的粗糙度會沿著溼邊周長，甚至沿著渠道變化。例如一條河中，其正常河床可能有石礫底面，但是其延伸的氾濫平原可能是生滿灌木的表面。有幾個方法來解決這樣的問題，為整個渠道截面找出等效曼寧係數，或將渠道考慮成由幾個次區域組成並應用疊加原理。例如，一個渠道的截面可被分成 N 個次區域，每一個有其自己的曼寧係數與流率。當決定一個區域的周長

表 13-1 明渠中的水流的曼寧係數的平均值*

壁面材質	n
A. 人造襯裡渠道	
玻璃	0.010
黃銅	0.011
鋼，平滑	0.012
鋼，油漆	0.014
鋼，鉚釘	0.015
鑄鐵	0.013
混凝土，精製	0.012
混凝土，粗製	0.014
木材，鉋光	0.012
木材，無鉋光	0.013
陶板	0.014
砌磚	0.015
瀝青	0.016
折疊金屬	0.022
粗石工	0.025
B. 澆渠的土渠道	
乾淨	0.022
礫土	0.025
多草	0.030
大礫石	0.035
C. 自然渠道	
乾淨且直	0.030
有水池的緩流	0.040
主要河流	0.035
山溪	0.050
D. 氾濫平原	
牧地，農地	0.035
疏灌木	0.050
濃灌木	0.075
樹木	0.150

* n 的不確定性可達 $\pm 20\%$ 或更多。

時，只有那個區域邊界的溼部分被考慮，而假想邊界則被忽略。通過渠道的流率是通過所有區域的流率的加總，如例題 13-4 所說明的。

例題 13-2 明渠在均勻流時的流率

水在一條多草的人工濬渫渠道中流動，其梯形截面的底寬度 0.8 m，角度 60° ，且底面傾斜角度為 0.3° ，如圖 13-19 所示。如果量測到的流動深度是 0.52 m，試求水通過這個渠道的流率。如果底面傾斜角度是 1° ，你的答案會是什麼呢？

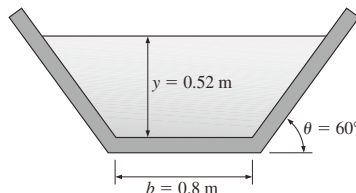


圖 13-19 例題 13-2 的示意圖。

解答：水在一個已知尺寸的多草的矩形渠道中流動。要決定對應一個流動深度量測值的流率。

假設：1. 流動是穩定且均勻的。2. 底面斜率是常數。3. 渠道的溼邊的粗糙度 (即摩擦係數)，是常數。

性質：多草表面的明渠的曼寧係數是 $n = 0.030$ 。

解析：渠道的截面積、周長與水力半徑是

$$A_c = y \left(b + \frac{y}{\tan \theta} \right) = (0.52 \text{ m}) \left(0.8 \text{ m} + \frac{0.52 \text{ m}}{\tan 60^\circ} \right) = 0.5721 \text{ m}^2$$

$$p = b + \frac{2y}{\sin \theta} = 0.8 \text{ m} + \frac{2 \times 0.52 \text{ m}}{\sin 60^\circ} = 2.001 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{0.5721 \text{ m}^2}{2.991 \text{ m}} = 0.2859 \text{ m}$$

渠道的底面斜率是

$$S_0 = \tan \alpha = \tan 0.3^\circ = 0.005236$$

通過渠道的流率用曼寧方程式決定，

$$\dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1 \text{ m}^{1/3}/\text{s}}{0.030} (0.5721 \text{ m}^2)(0.2859 \text{ m})^{2/3}(0.005236)^{1/2} = \mathbf{0.60 \text{ m}^3/\text{s}}$$

底面角度為 1° 的流率可以用 $S_0 = \tan \alpha = \tan 1^\circ = 0.01746$ 代入最後一個關係式中來決定。結果是 $\dot{V} = \mathbf{1.1 \text{ m}^3/\text{s}}$ 。

討論：注意流率是底面角度的強函數。同時，曼寧係數的值，從而使計算出的流率，有可觀的不確定性。若 n 值有 10% 的不確定性，會導致流率也有 10% 的不確定性。因此最後的結果只以兩個有效數字給出。

例題 13-3 矩形渠道的高度

水在一個粗製混凝土矩形渠道（其底部寬 1.2 m）中輸送，流率為 $1.5 \text{ m}^3/\text{s}$ 。地形使渠道底面每 300 m 長下降 0.6 m，試求在均勻流條件下渠道的最小高度（圖 13-20）。假如底面是每 300 m 長度下降 0.3 m，你的答案會是什麼呢？

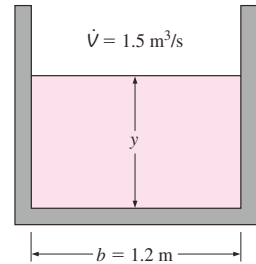


圖 13-20 例題 13-3 的示意圖。

解答：水在一個已知底面寬度的矩形粗製混凝土渠道中流動。要決定對應一個指定流率的最小渠道高度。

假設：1. 流動是穩定而均勻的。2. 底面斜率是常數。3. 渠道溼邊的粗糙度，從而摩擦因子，是常數。

性質：一個具有粗製混凝土表面的明渠的曼寧係數是 $n = 0.014$ 。

解析：渠道的截面積、周長與水力半徑為

$$A_c = by = (1.2 \text{ m})y \quad p = b + 2y = (1.2 \text{ m}) + 2y \quad R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{1.2y}{1.2 + 2y}$$

渠道的底面斜率是 $S_0 = 0.6/300 = 0.002$ 。使用曼寧方程式，通過渠道的流率被表示為

$$\dot{Q} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2}$$

$$1.5 \text{ m}^3/\text{s} = \frac{1 \text{ m}^{1/3}/\text{s}}{0.014} (1.2y \text{ m}^2) \left(\frac{1.2y}{1.2 + 2y} \text{ m} \right)^{2/3} (0.002)^{1/2}$$

這是 y 的一個非線性方程式。使用方程式求解器，例如 EES 或用疊代法，解出的流動深度是

$$y = 0.799 \text{ m}$$

如果底面每 300 m 長下降 0.3 m，底面斜率是 $S_0 = 0.001$ ，且流動深度是 $y = 1.05 \text{ m}$ 。

討論：注意 y 是流動深度，因此這是渠道高度的最小值。同時曼寧係數 n 有可觀的不確定性，在決定建造渠道高度時必須被考慮。

例題 13-4 有非均勻粗糙度的渠道

水在一個渠道中流動，其底面斜率是 0.003，且其截面積示於圖 13-21。圖中也給出了不同次區域的尺寸與曼寧係數。試求通過渠道的流率與渠道的等效曼寧係數。

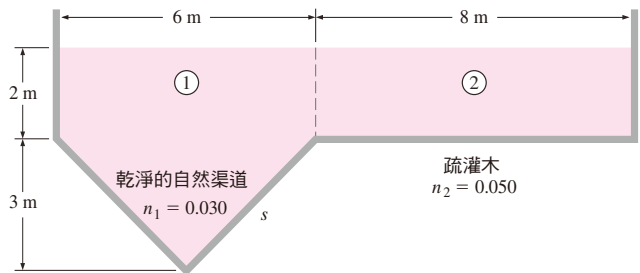


圖 13-21 例題 13-4 的示意圖。

解答：水流過一個有不均勻表面特性的渠道。要決定流率與等效曼寧係數。

假設：1. 流動是穩定且均勻的。2. 底面斜率是常數。3. 沿著渠道方向的曼寧係數不會改變。

解析：渠道包含粗糙度不同的兩個部分，因此將渠道區分成兩個次區域，如圖 13-21 所示，是適當的。每個次區域的流率可以用曼寧方程式決定，而總流率可以將它們加總來決定。

三角形渠道的邊長是 $s = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4.243 \text{ m}$ ，然後每個次區域及整個渠道的流動面積、周長及水力半徑變成：

次區域 1：

$$A_{c1} = 21 \text{ m}^2 \quad p_1 = 10.486 \text{ m} \quad R_{h1} = \frac{A_{c1}}{p_1} = \frac{21 \text{ m}^2}{10.486 \text{ m}} = 2.00 \text{ m}$$

次區域 2：

$$A_{c2} = 16 \text{ m}^2 \quad p_2 = 10 \text{ m} \quad R_{h2} = \frac{A_{c2}}{p_2} = \frac{16 \text{ m}^2}{10 \text{ m}} = 1.60 \text{ m}$$

整個渠道：

$$A_c = 37 \text{ m}^2 \quad p = 20.486 \text{ m} \quad R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{37 \text{ m}^2}{20.486 \text{ m}} = 1.806 \text{ m}$$

對每個次區域使用曼寧方程式，通過流道的總流率被決定為

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \frac{a}{n_1} A_{c1} R_{h1}^{2/3} S_0^{1/2} + \frac{a}{n_2} A_{c2} R_{h2}^{2/3} S_0^{1/2} \\ &= (1 \text{ m}^{1/3}/\text{s}) \left[\frac{(21 \text{ m}^2)(2 \text{ m})^{2/3}}{0.030} + \frac{(16 \text{ m}^2)(1.60 \text{ m})^{2/3}}{0.050} \right] (0.003)^{1/2} \\ &= 84.8 \text{ m}^3/\text{s} \approx 85 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

知道總流率，整個渠道的等效曼寧係數可以用曼寧方程式決定，

$$n_{\text{eff}} = \frac{a A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2}}{\dot{V}} = \frac{(1 \text{ m}^{1/3}/\text{s})(37 \text{ m}^2)(1.806 \text{ m})^{2/3}(0.003)^{1/2}}{84.8 \text{ m}^3/\text{s}} = 0.035$$

討論：渠道的等效曼寧係數 n_{eff} 的結果介於兩個 n 值之間，正如預期。渠道的曼寧係數的加權平均是 $n_{\text{avg}} = (n_1 P_1 + n_2 P_2)/P = 0.040$ ，其值與 n_{eff} 相當不同。因此，使用一個加權的平均曼寧係數給整個渠道雖然很吸引人，但卻不是那麼正確。

13-6 最好的水力截面積

明渠系統通常是在重力的影響下所設計出的，以最低可能的成本在一個指定的流率下來輸送液體到一個較低高度的地方。注意不需要輸入能量，明渠系統的成本主要包含的是起始建造成本，因此正比於系統的物理尺寸。對於一個給定的渠道長度，渠道的周長代表系統的成本，應該被維持在一個最小值，目的是最小化系統的尺寸，從而最小化系統的成本。

從另一個觀點來看，流動的阻力是由於壁剪應力 τ_w 與壁面積，其是等於每單位渠道長度的溼邊周長。因此對一個給定的流動截面積 A_c ，溼邊周長越小，阻力越小，從而使平均速度與流率越大。

再從另一個觀點來看，對一個指定的渠道幾何，具有指定的底面斜率 S_0 與表面襯裡（因此是粗糙度係數 n ），流動速度是由曼寧公式 $V = aR_h^{2/3}S_0^{1/2}/n$ 給定。因此流速隨水力半徑增加，為了最大化每單位截面積的平均流速與流率，水力半徑必須被最大化（因此周長必須被極小化，因為 $R_h = A_c/p$ ）。我們得到以下的結論：

明渠的最好的水力截面是有最大水力半徑的那一個或等效地，對一個指定的截面積具有最小的溼邊周長的那一個。

每單位面積周長最小的形狀是圓形。因此，在最小流動阻力的基礎下，明渠的最好的截面是半圓形（圖 13-22）。然而，建造一個具有平直邊牆的明渠（例如梯形或矩形截面的渠道）取代半圓形的渠道通常比較便宜，並且渠道的一般形狀可能會被事先指定。因此對於最好的截面，分別地分析每一種幾何形狀是合理的。

作為一個啟發的例子，考慮一個精製混凝土（ $n = 0.012$ ）的矩形渠道，其寬度 b ，流動深度 y ，底面斜率是 1° （圖 13-23）。對於一個 1 m^2 的截面積，要決定深寬比 y/b 對水力半徑 R_h 與流率 \dot{V} 的影響， R_h 與 \dot{V} 用曼寧公式計算。結果被表列在表 13-2 並畫在圖 13-24 中，深寬比的範圍從 0.1 到 5。從表與圖中，我們觀察到流率 \dot{V} 隨著深寬比 y/b 增加而增加，在 $y/b = 0.5$ 時達到一個最大值，然後開始減小（ \dot{V} 的數值也可被解釋為用 m/s 表示的流速，因為 $A_c = 1 \text{ m}^2$ ）。我們看到水力半徑有相同的趨勢，但是溼邊周長 p 則有相反的趨勢。這個結果證實了對一個給定的形狀最好的截面是有最大水力半徑的那一個，或等效地，有最小的溼邊周長的那一個。

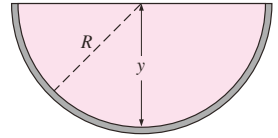


圖 13-22 一個明渠的最好的水力截面是一個半圓形，因為對於一個指定的截面積，其有最小的溼邊周長，從而具有最小的流動阻力。

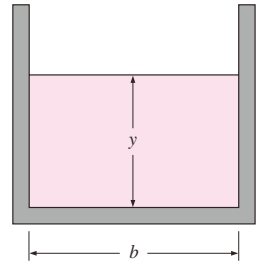


圖 13-23 一個寬度 b 、流動深度 h 的矩形明渠。對於一個給定的截面積，最高流率發生在當 $y = b/2$ 時。

矩形渠道

考慮液體在一個矩形截面，寬度 b 且流動深度 y 的明渠中的流動。在一個流動段的截面積與溼邊周長為

$$A_c = yb \quad \text{與} \quad p = b + 2y \quad (13-45)$$

從式 (13-45) 的第一個關係式解出 b ，並將其代入第二個關係式中得

表 13-2 對一個矩形渠道， $A_c = 1 \text{ m}^2$ ， $S_0 = \tan 1^\circ$ 與 $n = 0.012$ ，其水力半徑 R_h 與流率 \dot{V} 隨深寬比 y/b 的變化

深寬比 y/b	渠道寬度 b, m	流動深度 y, m	周長 P, m	水力半徑 R_h, m	流率 $\dot{V}, \text{m}^3/\text{s}$
0.1	3.162	0.316	3.795	0.264	4.53
0.2	2.236	0.447	3.130	0.319	5.14
0.3	1.826	0.548	2.921	0.342	5.39
0.4	1.581	0.632	2.846	0.351	5.48
0.5	1.414	0.707	2.828	0.354	5.50
0.6	1.291	0.775	2.840	0.352	5.49
0.7	1.195	0.837	2.869	0.349	5.45
0.8	1.118	0.894	2.907	0.344	5.41
0.9	1.054	0.949	2.951	0.339	5.35
1.0	1.000	1.000	3.000	0.333	5.29
1.5	0.816	1.225	3.266	0.306	5.00
2.0	0.707	1.414	3.536	0.283	4.74
3.0	0.577	1.732	4.041	0.247	4.34
4.0	0.500	2.000	4.500	0.222	4.04
5.0	0.447	2.236	4.919	0.203	3.81

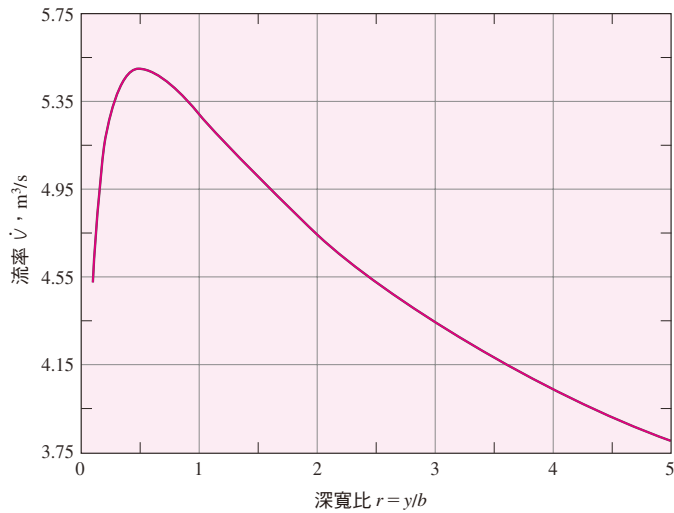


圖 13-24 一個矩形渠道 ($A_c = 1 \text{ m}^2$ 與 $S_0 = \tan 1^\circ$) 的流率隨深寬比 y/b 的變化。

$$p = \frac{A_c}{y} + 2y \quad (13-46)$$

現在我們應用準則：對一個給定的截面積，一個明渠的最好的水力截面是有最小的溼邊周長。取 p 對 y 的微分並維持 A_c 為常數，得到

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{A_c}{y^2} + 2 = -\frac{by}{y^2} + 2 = -\frac{b}{y} + 2 \quad (13-47)$$

令 $dp/dy = 0$ 並解出 y ，根據最好水力截面準則可以得到

最好水力截面 (矩形渠道) :

$$y = \frac{b}{2} \quad (13-48)$$

因此，一個矩形明渠應該設計成液體高度是渠道寬度的一半，以便在給定截面積下最小化流阻或最大化流率。這樣也會最小化周長及建造成本。這個結果證實了從表 13-2 的發現，即 $y = b/2$ 給出最好的截面。

梯形渠道

現在考慮液體在一個梯形截面 (其底面寬度 b ，流動深度 y ，且梯形角度從水平面量起是 θ) 的明渠中的流動，如圖 13-25 所示。在一個流動段的截面積與溼邊周長為

$$A_c = \left(b + \frac{y}{\tan \theta} \right) y \quad \text{與} \quad p = b + \frac{2y}{\sin \theta} \quad (13-49)$$

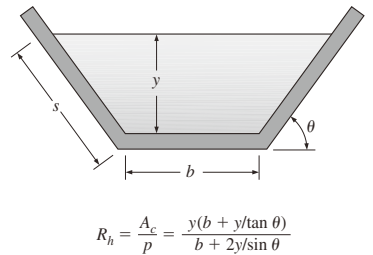


圖 13-25 梯形渠道的參數。

從式 (13-49) 的第一個關係式解出 b ，並將其代入第二個關係式中

$$p = \frac{A_c}{y} - \frac{y}{\tan \theta} + \frac{2y}{\sin \theta} \quad (13-50)$$

在維持 A_c 與 θ 為常數下，將 p 對 y 取微分得到

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{A_c}{y^2} - \frac{1}{\tan \theta} + \frac{2}{\sin \theta} = -\frac{b + y/\tan \theta}{y} - \frac{1}{\tan \theta} + \frac{2}{\sin \theta} \quad (13-51)$$

令 $dp/dy = 0$ 且解出 y ，對任何指定的梯形角度 θ ，根據最好水力截面準則可以得到

最好水力截面 (梯形渠道) :

$$y = \frac{b \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \quad (13-52)$$

對於 $\theta = 90^\circ$ 的特別 (矩形渠道)，此關係式簡化成 $y = b/2$ ，正如預期。

一個梯形渠道的水力半徑 R_h 可以被表示為

$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{y(b + y/\tan \theta)}{b + 2y/\sin \theta} = \frac{y(b \sin \theta + y \cos \theta)}{b \sin \theta + 2y} \quad (13-53)$$

重新整理式 (13-52) 成為 $b \sin \theta = 2y(1 - \cos \theta)$ ，代入式 (13-53) 中並簡化，有最好截面的梯形渠道的水力半徑變成



最好截面的水力半徑：

$$R_h = \frac{y}{2} \quad (13-54)$$

因此，有最後截面的梯形渠道不管梯形角度 θ 是多少，其水力半徑都是流動深度的一半。

類似地，最好水力截面的梯形角度是在保持 A_c 與 y 為常數下，取 p [式 (13-50)] 對 θ 的微分，令 $dp/d\theta = 0$ ，並對結果方程式求解 θ 來決定的。這樣會得到

最好的梯形角度：

$$\theta = 60^\circ \quad (13-55)$$

將最好的梯形角度 $\theta = 60^\circ$ 代入最好的水力截面關係式 $y = b \sin \theta / (2 - 2 \cos \theta)$ 得到

給 $\theta = 60^\circ$ 的最好的流動深度：

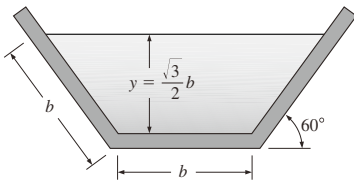
$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} b \quad (13-56)$$

因此流動截面的邊牆長度與流動面積變成

$$s = \frac{y}{\sin 60^\circ} = \frac{b\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2} = b \quad (13-57)$$

$$p = 3b \quad (13-58)$$

$$A_c = \left(b + \frac{y}{\tan \theta} \right) y = \left(b + \frac{b\sqrt{3}/2}{\tan 60^\circ} \right) (b\sqrt{3}/2) = \frac{3\sqrt{3}}{4} b^2 \quad (13-59)$$



$$R_h = \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} b \quad A_c = \frac{3\sqrt{3}}{4} b^2$$

因為 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 。因此梯形渠道的最好的截面是六邊形的一半 (圖 13-26)。這不令人驚訝，因為六邊形非常接近圓形，並且六邊形的一半在所有梯形渠道中每單位截面積有最小的周長。

其它渠道形狀的最好的水力截面也可以用相同的方式來決定。例如，一個直徑 D 的圓形渠道其最好的水力截面可以證明為 $y = D/2$ 。

圖 13-26 梯形渠道的最好的截面是一個六邊形的一半。

例題 13-5 一個明渠的最好的截面

水要在一個表面鋪有瀝青的明渠中以流率 $2 \text{ m}^3/\text{s}$ 的均勻流形式輸送。底面斜率是 0.001 ，試求最好的截面的尺寸，如果渠道是 (a) 矩形與 (b) 梯形 (圖 13-27)。

解答：水要在一個明渠中以指定的流率輸送。要決定矩形與梯形渠道的最好的渠道尺寸。

假設：1. 流動是穩定且均勻的。2. 底面斜率是常數。3. 渠道的溼表面的粗糙度 (即摩擦係數) 是常數。

性質：瀝青表面的明渠的曼寧係數是 $n = 0.016$ 。

解析：(a) 矩形渠道的最好截面發生在當流動高度是渠道寬度的一半時， $y = b/2$ 。因此渠道的截面積、周長與水力半徑為

$$A_c = by = \frac{b^2}{2} \quad p = b + 2y = 2b \quad R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{b}{4}$$

代入曼寧方程式中，

$$\dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} \rightarrow b = \left(\frac{2n\dot{V}4^{2/3}}{a\sqrt{S_0}} \right)^{3/8} = \left(\frac{2(0.016)(2 \text{ m}^3/\text{s})4^{2/3}}{(1 \text{ m}^{1/3}/\text{s})\sqrt{0.001}} \right)^{3/8}$$

其給出 $b = 1.84 \text{ m}$ 。因此， $A_c = 1.70 \text{ m}^2$ ， $p = 3.68 \text{ m}$ ，且最好的矩形渠道的尺寸為

$$b = 1.84 \text{ m} \quad \text{與} \quad y = 0.92 \text{ m}$$

(b) 梯形渠道的最好截面發生在當梯形角度 60° 與流動高度是 $y = b\sqrt{3}/2$ 時。因此

$$A_c = y(b + b\cos\theta) = 0.5\sqrt{3}b^2(1 + \cos 60^\circ) = 0.75\sqrt{3}b^2$$

$$p = 3b \quad R_h = \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}b$$

代入曼寧方程式中，

$$\dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} \rightarrow b = \left(\frac{(0.016)(2 \text{ m}^3/\text{s})}{0.75\sqrt{3}(\sqrt{3}/4)^{2/3}(1 \text{ m}^{1/3}/\text{s})\sqrt{0.001}} \right)^{3/8}$$

其給出 $b = 1.12 \text{ m}$ 。因此 $A_c = 1.64 \text{ m}^2$ ， $p = 3.37 \text{ m}$ ，且最好的梯形渠道的尺寸為

$$b = 1.12 \text{ m} \quad y = 0.973 \text{ m} \quad \text{與} \quad \theta = 60^\circ$$

討論：注意梯形截面較好因為它有較小的周長 (3.37 m 對 3.68 m)，因此有較低的建造成本。這是為什麼許多人造水道是梯形的原因 (圖 13-28)。然而，通過梯形渠道的平均速度較大，因為 A_c 較小。

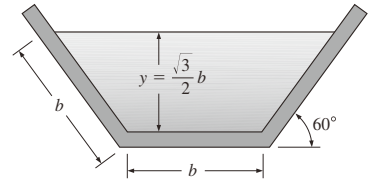
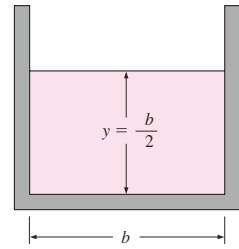


圖 13-27 例題 13-5 的示意圖。



(a)



(b)

圖 13-28 許多人造的水流渠道是梯形的，因為有較低的建造成本與較好的性能。

(a) © Pixtal/AGE Fotostock RF;

(b) Photo by Bryan Lewis.

13-7 漸變流

到目前為止，我們考慮的是均勻流，其流動深度 y 與流速 V 維持為常數。本節中考慮漸變流 (GVF)，這是一種穩定的非均勻流形式，特徵是流動深度與速度逐漸改變 (小斜率且沒有突然的變化)，並且自由表面總是維持平滑的 (沒有不連續性

與曲折)。流動深度與速度快速變化的流動，稱為急變流 (RVF)，將在 13-8 節中討論。底面斜率或渠道截面或流道中的一個障礙物的改變，都可能造成渠道中的均勻流變成漸變流或急變流。

急變流發生在渠道的一個小段之間，具有相對較小的表面積，因此與壁面剪力有關的摩擦損失是可忽略的。急變流中的水頭損失是高度局部性的，起因於強烈的擾動與紊流。另一方面，漸變流中的損失主要是由於沿著渠道的摩擦效應，並且可用曼寧公式來決定。

在漸變流中，流動深度與速度緩慢地改變，且自由表面是穩定的。這使得在質量與能量守恆定理的基礎上來推導沿著渠道的流動深度變化的公式，並獲得自由表面的形狀變得是可能的。

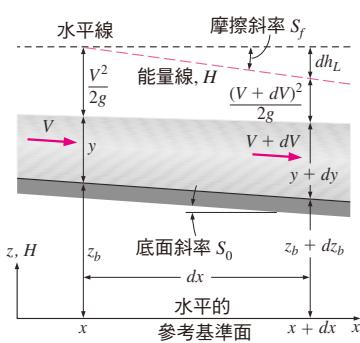


圖 13-29 一個明渠在漸變流 (GVF) 的條件下，經過一個微分流動段的性質的變化。

在均勻流中，能量線的斜率等於底面的斜率。因此摩擦斜率等於底面斜率， $S_f = S_0$ 。然而，在漸變流中這些斜率是不同的 (圖 13-29)。

考慮在一個寬度 b 的矩形明渠中的穩定流，並且假設底面斜率與水深的任何改變都相當緩慢。我們再一次用平均速度來寫出方程式並近似壓力分佈為靜水壓的，從式 (13-17)，液體在任何截面的總水頭是 $H = z_b + y + V^2/2g$ ，其中 z_b 是從參考基準面到底面的垂直距離。將 H 對 x 作微分得到

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx} \left(z_b + y + \frac{V^2}{2g} \right) = \frac{dz_b}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{V}{g} \frac{dV}{dx} \quad (13-60)$$

但是 H 是液體的總能量，因此 dH/dx 是能量線的斜率 (一個負的量)，它等於摩擦斜率的負值，如示於圖 13-29 中的。同時， dz_b/dx 是底面斜率的負值。因此，

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{dh_L}{dx} = -S_f \quad \text{與} \quad \frac{dz_b}{dx} = -S_0 \quad (13-61)$$

將式 (13-61) 代入式 (13-60) 得到

$$S_0 - S_f = \frac{dy}{dx} + \frac{V}{g} \frac{dV}{dx} \quad (13-62)$$

質量守恆方程式對在矩形渠道中的穩定流是 $\dot{Q} = ybV = \text{常數}$ 。相對於 x 作微分得到

$$0 = bV \frac{dy}{dx} + yb \frac{dV}{dx} \rightarrow \frac{dV}{dx} = -\frac{V}{y} \frac{dy}{dx} \quad (13-63)$$

將式 (13-63) 代入式 (13-62) 中，並注意 V/\sqrt{gy} 是福勞數，

$$S_0 - S_f = \frac{dy}{dx} - \frac{V^2}{gy} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} - Fr^2 \frac{dy}{dx} \quad (13-64)$$

求解 dy/dx ，得到在一個明渠中的漸變流的流動深度 (或表面形狀) 的變化率的關係式，

GVF 方程式：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2} \quad (13-65)$$

這與在可壓縮流中流動面積作為馬赫數的函數的變化關係類似。這個關係式是為矩形渠道導出的，但對其它截面的渠道也是成立的，只要福勞數被適當地表示即可。對於一組給定的參數，這個微分方程式的解析或數值解會得到流動深度 y 與 x 的函數關係表示式，而函數 $y(x)$ 即表面形狀。

流動深度的一般趨勢——不管它沿著渠道是增加、減小或維持常數——相依於 dy/dx 的正負號，而它則相依於式 (13-65) 中分子與分母的正負號。福勞數永遠是正的，摩擦斜率 S_f 也是一樣 (除非是理想情況下的流動，其摩擦效應可以忽略， h_L 與 S_f 兩者都是零)。底面斜率 S_0 對往下傾斜的流段 (一般的情況) 是正的，對水平流段是零，而對往上傾斜的流段 (逆流) 是負的。流動深度當 $dy/dx > 0$ 時增加，當 $dy/dx < 0$ 時減小，而當 $dy/dx = 0$ 時，維持為常數 (因此自由表面平行於渠道底面，如在均勻流之情況) 並且 $S_0 = S_f$ (圖 13-30)。對於指定 S_0 與 S_f 時， dy/dx 可能是正或負，端視福勞數小於或大於 1 而定。因此，次臨界流與超臨界流的流動行為是相反的。假如 $S_0 - S_f > 0$ ，次臨界流在流動方向的流動深度增加，但在超臨界流中則減小。

分母 $1 - Fr^2$ 的正負號的決定是簡單的：對於次臨界流 ($Fr < 1$)，它是正的；而對於超臨界流 ($Fr > 1$)，則是負的。但是分子的正負號要看 S_0 與 S_f 的相對大小而定。注意摩擦斜率 S_f 永遠是正的，其值在均勻流中 ($y = y_n$) 等於渠道斜率 S_0 。摩擦斜率是會隨著流動距離改變的量，並且就像在例題 13-6 中所展示的，可以用曼寧方程式根據每個流動位置的深度來做計算。注意水頭損失隨著速度增加而增加，並且對於一個給定的流率，速度與流動深度成反比。因此當 $y < y_n$ 時， $S_f > S_0$ ，從而 $S_0 - S_f < 0$ ；當 $y > y_n$ 時， $S_f < S_0$ ，從而 $S_0 - S_f > 0$ 。對於水平的 ($S_0 = 0$) 與向上傾斜的 ($S_0 < 0$) 渠道，分子 $S_0 - S_f$ 永遠都是負



圖 13-30 一條緩慢流動的河流，具有幾乎是常數的深度與截面，例如這裡顯示的芝加哥河，是均勻流的一個例子，其 $S_0 \approx S_f$ 及 $dy/dx \approx 0$ 。
© Hisham F. Ibrahim/Getty RF

的，因此在這種渠道中，當在次臨界流時，流動深度沿著流動方向減小。

明渠中的液體表面形狀， $y(x)$

明渠系統的設計與建造是根據沿著渠道的預計流動深度，因此對於一個指定的流率與指定的渠道能夠預測流動深度是很重要的。一個流動深度相對於流動距離的圖是流動的表面形狀 (surface profile) $y(x)$ 。漸變流的表面形狀的一般特性相依於與臨界及正常深度相對應的底面斜率與流動深度。

一個典型的明渠包括各種不同底面斜率與不同流域的流段，因此有不同表面形狀的流動段。例如，渠道的一個向下傾斜的流段的表面形狀的一般形狀與在一個向上傾斜的流段中的情形是不一樣的。同樣地，在次臨界流中的形狀與在超臨界流中的形狀也不一樣。不像均勻流中不包括慣性力，漸變流包括液體的加速和減速，因此表面形狀反應液體重量、剪力與慣性力的動態平衡。

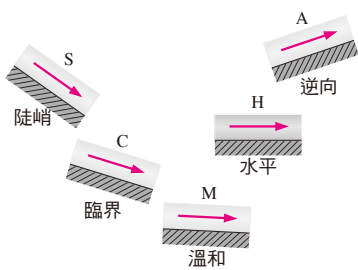


圖 13-31 對不同斜率型態的液體表面形狀用 S、C、M、H 與 A 等不同字母標識。

每一種表面形狀由一個指示渠道斜率的字母與一個指示相對於臨界深度 y_c 與正常深度 y_n 的流動深度的數字來作標識。渠道斜率可以是陡峭 (S)、臨界 (C)、溫和 (M)、水平 (H) 或逆向 (A) (圖 13-31)。渠道斜率如果 $y_n > y_c$ ，被稱為溫和的；如果 $y_n < y_c$ ，被稱為陡峭的如果 $y_n = y_c$ ，被稱為臨界的如果 $S_0 = 0$ (零底面斜率)，被稱為水平的；以及如果 $S_0 < 0$ (負斜率) 被稱為逆向的。注意當一個明渠中的液體沿山坡向上流動時，渠道斜率是逆向的。

一個明渠流段的分類相依於流率與渠道截面，也相依於渠道底面的斜率。一個渠道流段對一個流動被分類為溫和的斜率對另一個流動可能是陡峭的斜率，而對第三個流動甚至可能是臨界斜率。因此在我們可以評估斜率之前，需要計算臨界深度 y_c 與正常深度 y_n 。

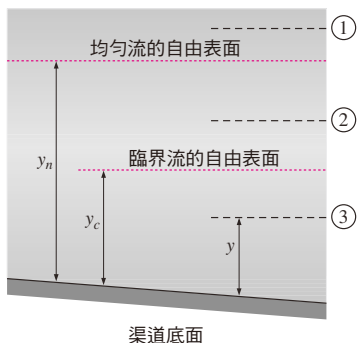


圖 13-32 基於流動深度相對於正常與臨界深度的值的液體表面形狀指定 1、2 與 3 等數字。

數字標識對一個給定斜率的渠道指示液體面的起始位置相對於臨界與均勻流的液面高度的關係，如圖 13-32 所示。用 1 標識的表面形狀，其流動深度同時大於臨界與正常深度 ($y > y_c$ 且 $y > y_n$)，用 2 標識的流動深度介於兩者之間 ($y_n > y > y_c$ 或 $y_n < y < y_c$)，而用 3 標識的流動深度則同時小於臨界與正常深度 ($y < y_c$ 且 $y < y_n$)。因此，對一個指定的渠道斜率型態，可能有三種不同的形狀。但是對於零斜率或逆向斜率的渠道，型態 1 的流動不能存在因為對於水平或向上的渠道，流動不可能是均勻的，因此正常深度沒被定義。同時，型態 2 的流動對於有臨界斜率的渠道不存在，因為在此情況下，臨界與正常深度是相同的。

以上討論五種斜率的分類與三種初始位置的型態，給出在漸變流中十二種不同的表面形狀外觀，都被列表並畫在表 13-3 中。每一種情況的福勞數也被給出，對於 $y < y_c$ 有 $Fr > 1$ ，同時也列出從式 (13-65)， $dy/dx = (S_0 - S_f)/(1 - Fr^2)$ ，所決定的表面形狀的斜率 dy/dx 的正負號。注意當 $S_0 - S_f$ 與 $1 - Fr^2$ 兩者皆為正或負時 $dy/dx > 0$ ，因此流動深度沿著流動方向增加。否則， $dy/dx < 0$ 且流動深度減小。第 1 型流動，流動深度沿著流動的方向增加，並且表面形狀漸近地趨近水平的平面。第 2 型流動，流動深度減小且表面形狀趨近 y_c 或 y_n 的較低者。第 3 型流動，流動深度增加且表面形狀趨近 y_c 或 y_n 的較低者。這種表面形狀的趨勢只要底面斜率或粗糙度沒有改變就會一直持續。

考慮表 13-3 標識為 M1 的情況 (溫和渠道斜率且 $y > y_n > y_c$)。此流動是次臨界的因為 $y > y_c$ 從而 $Fr < 1$ 且 $1 - Fr^2 > 0$ 。同時 $S_f < S_0$ 從而 $S_0 - S_f > 0$ 因為 $y > y_n$ ，並且因此流速小於正常流的速度。因此，表面形狀的斜率 $dy/dx = (S_0 - S_f)/(1 - Fr^2) > 0$ ，使得流動深度 y 沿著流動方向增加。但當 y 增加時，流速減小，並且因此 S_f 與 Fr 趨近零。結果 dy/dx 趨近 S_0 使得流動深度的增加率等於渠道斜率。這要求表面的形狀在 y 大的時候變成水平。因此我們結論 M1 表面形狀在流動的方向先上升，然後漸進地趨向水平。

當 $y \rightarrow y_c$ 在次臨界流中 (例如 M2、H2 與 A2)，我們有 $Fr \rightarrow 1$ 且 $1 - Fr^2 \rightarrow 0$ ，且因此斜率 dy/dx 趨向負無限大；但是當 $y \rightarrow y_c$ 在超臨界流中 (例如 M3、H3 與 A3)，我們有 $Fr \rightarrow 1$ 且 $1 - Fr^2 \rightarrow 0$ ，且因此 dy/dx ，它是一個正量，趨向無限大。亦即，自由表面幾乎垂直地上升且流動深度非常快速地增加。這在物理上不能夠被維持，因此自由表面破碎了。結果形成一個水躍。當發生此現象時，一維近似不再適用。

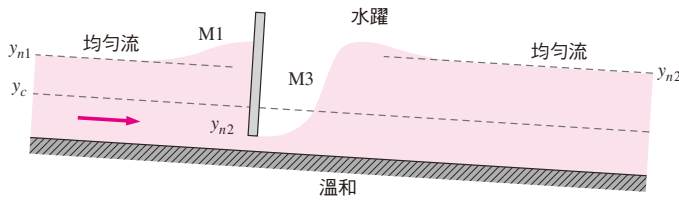
一些代表性的表面形狀

一個典型的明渠系統包括幾個不同斜率的流段，其間有稱為過渡區的連接段，因此流動的總表面形狀是一個連續的形狀，由先前所描述過的各個形狀所組成。明渠中通常會遭遇到幾個代表性的表面形狀，包括一些複合形狀，被給在圖 13-33 中。對每一種情況，表面形狀的改變是由渠道幾何上的改變所造成的。例如斜率上的突然改變或在流動中的一個障礙物，如水閘門。更多複合形狀可以從列於參考資料中的專書中找到。表面形狀上的一點代表在那一點上滿足質量、動量與能量守恆關係式的流動高度。注意在漸變流中 $dy/dx \ll 1$ 且 $S_0 \ll 1$ ，因此在這些圖中渠道與表面形狀兩者的斜率，為了有較好的視覺效果都被高度誇大了。許多渠道與表面形狀如果按照比例畫出，看起來幾乎是水平的。

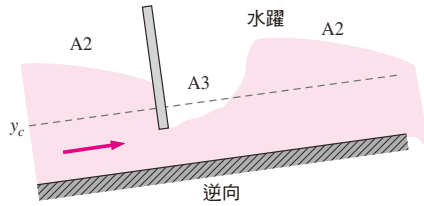
圖 13-33a 顯示的是在一個有溫和斜率與水閘門的渠道中漸變流的表面形狀。

表 13-3 漸變流中表面形狀的分類。垂直方向的尺寸被高度誇張了。

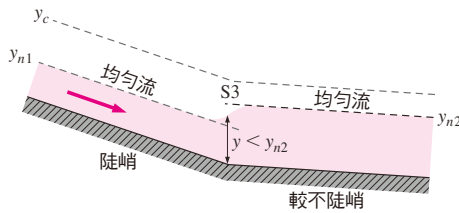
渠道斜率	形狀符號	流動深度	福勞數	形狀斜率	表面形狀
陡峭 (S) $y_c > y_n$ $S_0 < S_c$	S1	$y > y_c$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	<p>渠道底面, $S_0 > S_c$</p>
	S2	$y_n < y < y_c$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} < 0$	
	S3	$y < y_n$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	
臨界 (C) $y_c = y_n$ $S_0 < S_c$	C1	$y > y_c$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	<p>渠道底面, $S_0 = S_c$</p>
	C2	$y < y_c$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	
	C3				
溫和 (M) $y_c < y_n$ $S_0 < S_c$	M1	$y > y_n$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	<p>起始點 水平線</p> <p>正常深度</p> <p>表面形狀 $y(x)$</p> <p>臨界深度</p> <p>渠道底面, $S_0 < S_c$</p>
	M2	$y_c < y < y_n$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} < 0$	
	M3	$y < y_c$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	
水平 (H) $y_n \rightarrow \infty$ $S_0 = 0$	H2	$y > y_c$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} < 0$	<p>渠道底面, $S_0 = 0$</p>
	H3	$y < y_c$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	
逆向 (A) $S_0 < 0$ y_n : 不存在	A2	$y > y_c$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} < 0$	<p>渠道底面, $S_0 < 0$</p>
	A3	$y < y_c$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	



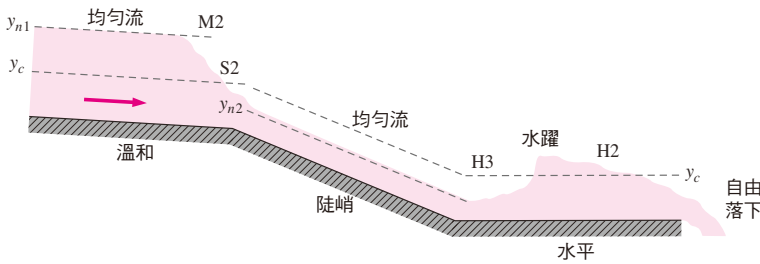
(a) 在一個具有溫和斜率的明渠中通過水閘門的流動



(b) 在一個具有逆向斜率及自由出口的明渠中通過水閘門的流動



(c) 均勻的超臨界流從陡峭到較不陡峭的變化



(d) 均勻的次臨界流從溫和到陡峭到具有自由出口的水平斜率的變化

圖 13-33 在平渠流中會遭遇到的幾個常見的表面形狀。所有流動都是從左向右。

次臨界的上游流動 (注意流動是次臨界的，因為斜率是溫和的) 當它接近閘門時慢下來 (例如河流接近水壩)，並且液體高度上升了。當流動通過閘門時是超臨界的 (因為開口的高度低於臨界深度)。因此，閘門之前的表面形狀是 M1，而閘門之後水躍之前是 M3。

一個明渠中的一段可能有負斜率並且包含上坡流，如圖 13-33b 所示的。有逆向斜率的流動無法維持，除非慣性力能克服抵抗流體運動的重力及摩擦力。因此一個上坡的渠道流段必須被一個下坡的流段或一個自由出口所跟隨。當具有逆向斜率的次臨界流接近一個水閘門時，接近閘門時流動深度減小，產生一個 A2 形狀。通

過閘門的流動一般是超臨界的，在水躍之前會產生一個 A3 形狀。

圖 13-33c 的明渠流段包括一個從陡峭到不那麼陡峭的斜率的改變。在較不陡峭的那個流段其流速較小 (較小的高度下降驅動流體)，因此當均勻流再一次建立時，流動深度較高。注意有較陡峭斜率的均勻流必須是超臨界的 ($y < y_c$)，流動深度很平滑地經過一個 S3 的形狀從起始增加到新的均勻流高度。

圖 13-33d 顯示出一個明渠的複合表面形狀，包含幾個不同的流段。開始時斜率是溫和的，其流動是均勻且次臨界的。然後流動變成陡峭的，且其流動當均勻流建立時變成超臨界的。臨界深度發生在坡度改變的地方。斜率的改變伴隨著流動深度，在溫和段末端經過一個 M2 形狀，與在陡峭段前端經過一個 S2 形狀，平滑地減小。在水平段，流動深度先經過一個 H3 形狀平滑地增加，然後經歷一個水躍急速地增加。接著，當液體加速朝去渠道尾端自由向外掉落時，流動深度經過一個 H2 形狀減小。流動在達到渠道末端之前變成臨界的，並且出口控制著通過水躍的上游流動。出口的流動是超臨界的。注意，均勻流在水平渠道中不能夠建立，因為重力在流動方向沒有分量，且流動是慣性驅動的。

表面形狀的數值解

預測表面形狀是設計明渠系統的一個重要部分。一個決定表面形狀的良好起始點是辨識沿著渠道的重要點，稱為控制點 (control points)，在這些點上的流動深度可以從流率的知識上計算出來。例如，一個矩形渠道中發生臨界流的截面，其流動深度稱為臨界點，可以用 $y_c = (\dot{V}^2 / gb^2)^{1/3}$ 決定。正常深度，其為均勻流被建立時所達到的流動深度，也是一個控制點。一旦有了在控制點上的流動深度，其上游或下游的表面形狀，通常用數值積分非線性微分方程式 [式 (13-65)，重複寫在這裡] 來決定

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2} \quad (13-66)$$

摩擦斜率 S_f 是從均勻流條件來決定的，且福勞數是從適用於渠道截面的一個關係式所決定的。

例題 13-6 有 M1 表面形狀的漸變流

考慮水在一個每單位寬度流率 $1 \text{ m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$ ，曼寧係數為 $n = 0.02$ 的寬矩形渠道中的漸變流。渠道的斜率是 0.001 ，並且在 $x = 0$ 的位置量測到的流動深度是 0.8 m 。(a) 決定流動的正常和臨界流動深度，並分類水的表面形狀，並 (b) 在範圍 $0 \leq x \leq 1000 \text{ m}$ 用數值方法積分 GVF 方程式來計算在 $x = 1000 \text{ m}$ 的流動深度 y 。重做 (b) 小題得到不同 x 值的流動深度，並畫出表面形狀 (圖 13-34)。

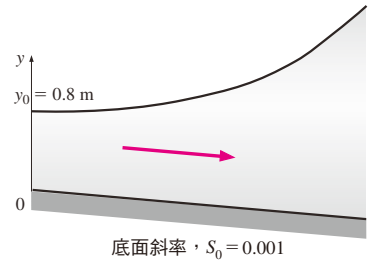


圖 13-34 例題 13-6 的示意圖。

解答：考慮水在一個寬矩形渠道中的漸變流。要決定水在一個指定位置上的正常與臨界流動深度、流動型態和流動深度，並畫出表面形狀。

假設：1. 渠道是寬的，並且流動是漸變的。2. 底面斜率是常數。3. 渠道溼面的粗糙度與摩擦係數是常數。

性質：渠道的曼寧係數為 $n = 0.02$ 。

解析：(a) 渠道是寬的，因此水力半徑等於流動深度， $R_h \cong y$ 。知道每單位寬度 ($b = 1 \text{ m}$) 的流率。正常深度可用曼寧方程式決定為

$$\dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{a}{n} (yb) y^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{a}{n} b y^{5/3} S_0^{1/2}$$

$$y_n = \left(\frac{(\dot{V}/b)n}{aS_0^{1/2}} \right)^{3/5} = \left(\frac{(1 \text{ m}^2/\text{s})(0.02)}{(1 \text{ m}^{1/3}/\text{s})(0.001)^{1/2}} \right)^{3/5} = 0.76 \text{ m}$$

此流動的臨界深度是

$$y_c = \frac{\dot{V}^2}{gA_c^2} = \frac{\dot{V}^2}{g(by)^2} \rightarrow y_c = \left(\frac{(\dot{V}/b)^2}{g} \right)^{1/3} = \left(\frac{(1 \text{ m}^2/\text{s})^2}{(9.81 \text{ m/s}^2)} \right)^{1/3} = 0.47 \text{ m}$$

注意在 $x = 0$ ， $y_c < y_n < y$ ，我們從表 13-3 看出在此 GVF 中水的表面形狀被歸類為 M1。

(b) 知道起始條件 $y(0) = 0.8 \text{ m}$ ，任何 x 位置的流動深度是由數值積分 GVF 方程式來決定的，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - \text{Fr}^2}$$

其中福勞數對一個寬矩形渠道是

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gy}} = \frac{\dot{V}/by}{\sqrt{gy}} = \frac{\dot{V}/b}{\sqrt{gy^3}}$$

而摩擦斜率是從均勻流方程式令 $S_0 = S_f$ 來決定的，

$$\dot{V} = \frac{a}{n} b y^{5/3} S_f^{1/2} \rightarrow S_f = \left(\frac{(\dot{V}/b)n}{ay^{5/3}} \right)^2 = \frac{(\dot{V}/b)^2 n^2}{a^2 y^{10/3}}$$

代入，對一個寬矩形渠道的 GVF 方程式變成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - (\dot{V}/b)^2 n^2 / (a^2 y^{10/3})}{1 - (\dot{V}/b)^2 / (g y^3)}$$

這是高度非線性的，因此要用解析方法積分非常困難（如果不是不可能）。幸運地，現在用像 EES 或 Matlab 這樣的程式使用數值方法來解這樣的非線性方程式是容易的。了解這一點，一階非線性微分方程式受起始條件 $y(x_1) = y_1$ 支配的解被表示為

$$y = y_1 + \int_{x_1}^{x_2} f(x,y) dx \quad \text{其中} \quad f(x,y) = \frac{S_0 - (\dot{V}/b)^2 n^2 / (a^2 y^{10/3})}{1 - (\dot{V}/b)^2 / (g y^3)}$$

其中 $y = y(x)$ 是在指定 x 位置的水深。對於給定的數值，這個問題可以用 EES 求解如下：

Vol=1 “m³/s, volume flow rate per unit width, b=1 m”

b=1 “m, width of channel”

n=0.02 “Manning coefficient”

S_0=0.001 “slope of channel”

g=9.81 “gravitational acceleration, m/s²”

x1=0; y1=0.8 “m, initial condition”

x2=1000 “m, length of channel”

f_xy=(S_0-((Vol/b)^2*n^2/y(10/3)))/(1-(Vol/b)^2/(g*y^3)) “the GVF equation to be integrated”

y=y1+integral(f_xy, x, x1, x2) “integral equation with automatic step size.”

將以上的迷你程式拷貝到一個空的 EES 螢幕上，並計算得到在位置 1000 m 的水深，

$$y(x_2) = y(1000 \text{ m}) = 1.44 \text{ m}$$

注意內建函數 “integral” 使用一個自動調整步長的方法在指定的上下限之間進行數值積分。沿著渠道在不同位置的水深是在不同的 x_2 值上重複此計算而得到的。畫出結果得到顯示在圖 13-34 上的表面形狀。使用 EES 的曲線擬合的特性，我們甚至可以將流動深度數據曲線擬合成以下的二次多項式：

$$y_{\text{approx}}(x) = 0.7930 + 0.0002789x + 3.7727 \times 10^{-7}x^2$$

可以證明從這個曲線擬合公式所得到的流動深度結果與圖表上的數據差異不超過 1%。

討論：圖形結果證實從表 13-3 所得到的定量預測，即一個 M1 形狀應該得到在往下游的方向水的深度增加。這個問題也可以用其它程式解出，像 Matlab，使用給出在圖 13-36 的程式碼。

沿渠道的距離， m	水深，m
0	0.80
100	0.82
200	0.86
300	0.90
400	0.96
500	1.03
600	1.10
700	1.18
800	1.26
900	1.35
1000	1.44

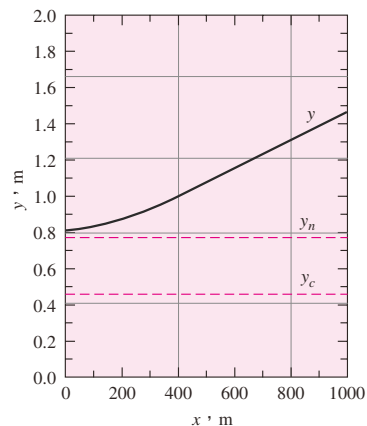


圖 13-35 在例題 13-6 中討論的 GVF 問題的流動深度與表面形狀。

```
clear all
domain=[0 1000]; % limits on integral
s0=.001; % channel slope
n=.02; % Manning roughness
q=1; % per-unit-width flowrate
g=9.81; % gravity (SI)
y0=.8; % initial condition on depth
[X,Y]=ode45('simple_flow_derivative',
[domain(1) domain(end)],y0,
[],s0,n,q,g,domain);

plot(X, Y, 'k')
axis([0 1000 0 max(Y)])
xlabel('x (m)');ylabel('y (m)');
*****

function
yprime=simple_flow_
derivative(x,y,flag,s0, n,q,g, (domain)
yprime=(s0-n.^2*q.^2./y.^(10/3))./(1-
q.^2/g./y.^3);
```

圖 13-36 求解例題 13-6 的 GVF 問題的一個 Matlab 程式。

例題 13-7 渠道斜率的分類

水在一個有粗製混凝土表面的矩形明渠中均勻的流動。渠道寬度 6 m，流動深度 2 m，且底面斜率是 0.004。試決定此流動的渠道應該被分類為溫和的、臨界的或是陡峭的 (圖 13-37)。

解答：水在一個明渠中均勻的流動。要決定這個流動的渠道是溫和、臨界的或陡峭的。

假設：1. 流動是穩定且均勻的。2. 底面斜率是常數。3. 渠道溼面的粗糙度不變，因此摩擦係數是常數。

性質：對一個粗製混凝土表面的明渠，其曼寧係數是 $n = 0.014$ 。

解析：截面積、周長與水力半徑為

$$\begin{aligned} A_c &= yb = (2 \text{ m})(6 \text{ m}) = 12 \text{ m}^2 \\ p &= b + 2y = 6 \text{ m} + 2(2 \text{ m}) = 10 \text{ m} \\ R_h &= \frac{A_c}{p} = \frac{12 \text{ m}^2}{10 \text{ m}} = 1.2 \text{ m} \end{aligned}$$

流率用曼寧方程式決定為

$$\dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1 \text{ m}^{1/3}/\text{s}}{0.014} (12 \text{ m}^2)(1.2 \text{ m})^{2/3}(0.004)^{1/2} = 61.2 \text{ m}^3/\text{s}$$

注意，此流動是均勻的，指定的流率是正常深度，因此 $y = y_n = 2 \text{ m}$ 。

此流動的臨界深度是

$$y_c = \frac{\dot{V}^2}{gA_c^2} = \frac{(61.2 \text{ m}^3/\text{s})^2}{(9.81 \text{ m}/\text{s}^2)(12 \text{ m}^2)^2} = 2.65 \text{ m}$$

此渠道在這些流動條件下被分類為陡峭的，因為 $y_n < y_c$ ，且流動是超臨界的。

討論：如果流動深度大於 2.65 m，渠道斜率會被稱為溫和的。因為只有底面斜率並不足夠用來分類一個下坡的渠道是溫和、臨界的或陡峭的。

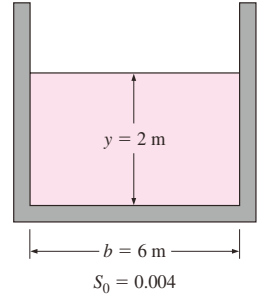


圖 13-37 例題 13-7 的示意圖。

13-8 急變流與水躍

明渠中的流動如果流動深度在一個相當短的距離變化非常明顯時被稱為急變流 (RVF) (圖 13-38)。例如發生在水閘門、寬頂堰、銳緣堰、瀑布與在渠道擴張或收縮的過渡段。渠道截面的變化是急變流的一個原因。但是有一些急變流，發生在即使渠道截面是常數的區域，例如通過水閘門的流動。

急變流一般都非常複雜，因為它們事實上可能包括可觀的多維度與暫態效應、逆流與流動分離 (圖 13-39)。因此急變流通

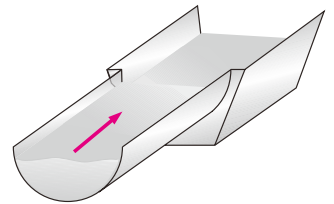


圖 13-38 流動有突然變化時會發生急變流，例如截面積的突然改變。

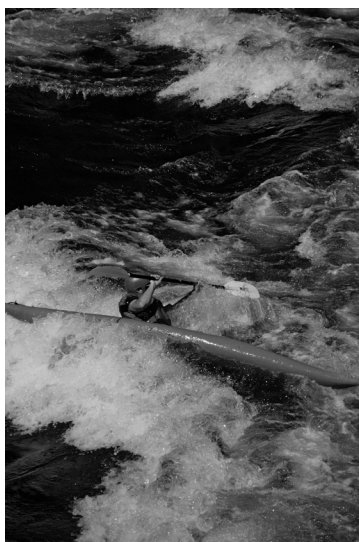


圖 13-39 當通過急流時，一個獨木舟划者同時遭遇到漸變流 (GVF) 與急變流 (RVF) 的許多特徵，而後者是比較刺激的。

© Karl Weatherly/Getty RF

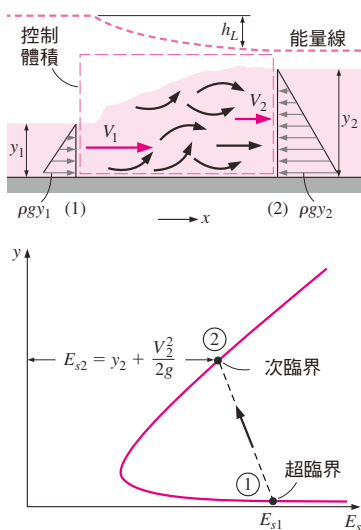


圖 13-40 一個水躍的示意圖與流動深度—比能量圖 (比能量減小)。

常用實驗的或數值的方法研究。但是不管這些複雜性，仍然有可能用一維的流動近似以合理的正確性分析某些急變流。

在陡峭渠道中的流動可能是超臨界的，如果由於渠道降低斜率或增加摩擦效應而不再能夠維持超臨界流，則流動必須變成次臨界的。任何這種從超臨界到次臨界的變化都是通過水躍發生的。水躍包含可觀的混合與攪動，因此會有相當可觀的機械能量耗散。

考慮通過一個包含水躍的控制體積的穩定流，如圖 13-40 所示。為了使一個簡單的分析變成是可能的，我們作以下的近似：

1. 在渠道的截面 1 與 2 的速度幾乎是常數，因此動量通量修正因子是 $\beta_1 = \beta_2 \cong 1$ 。
2. 液體中的壓力呈靜水壓力分佈，並且我們只考慮錶壓，因為大氣壓作用在所有表面上且其影響互相抵消。
3. 壁面剪應力及其有關的損失相對於水躍中由於劇烈攪動的損失是可忽略的。
4. 渠道是寬而水平的。
5. 除了重力以外，沒有外力或物體力。

對一個寬度 b 的渠道，質量守恆關係式 $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ 被表示為 $\rho y_1 b V_1 = \rho y_2 b V_2$ 或

$$y_1 V_1 = y_2 V_2 \quad (13-67)$$

注意作用在控制體積水平的 x - 方向的唯一力是壓力，動量方程式 $\sum \vec{F} = \sum_{\text{out}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{in}} \beta \dot{m} \vec{V}$ 在 x - 方向變成是靜水壓力與動量傳遞之間的平衡，

$$P_{1, \text{avg}} A_1 - P_{2, \text{avg}} A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \quad (13-68)$$

其中 $P_{1, \text{avg}} = \rho g y_1 / 2$ 及 $P_{2, \text{avg}} = \rho g y_2 / 2$ 。對於一個渠道寬度 b ，我們有 $A_1 = y_1 b$ 、 $A_2 = y_2 b$ 及 $\dot{m} = \dot{m}_2 = \dot{m}_1 = \rho A_1 V_1 = \rho y_1 b V_1$ 。代入並簡化，動量方程式變成

$$y_1^2 - y_2^2 = \frac{2y_1 V_1}{g} (V_2 - V_1) \quad (13-69)$$

用 $V_2 = (y_1/y_2)V_1$ ，從式 (13-67)，消去 V_2 得到

$$y_1^2 - y_2^2 = \frac{2y_1V_1^2}{gy_2}(y_1 - y_2) \quad (13-70)$$

從兩邊消去共同因子 $(y_1 - y_2)$ ，並重新整理得到

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + \frac{y_2}{y_1} - 2Fr_1^2 = 0 \quad (13-71)$$

其中 $Fr_1 = V_1/\sqrt{gy_1}$ 。這是一個 (y_2/y_1) 的二次方程式，它有兩個根——一正一負。注意 y_2/y_1 不能是負的，因為 y_2 與 y_1 兩者都是正的量，深度比 y_2/y_1 被決定為

深度比：

$$\frac{y_2}{y_1} = 0.5(-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2}) \quad (13-72)$$

對此水平流段能量方程式 (13-36) 是

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L \quad (13-73)$$

注意 $V_2 = (y_1/y_2)V_1$ 且 $Fr_1 = V_1/\sqrt{gy_1}$ ，與一個水躍有關的水頭損失被表示為

$$h_L = y_1 - y_2 + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = y_1 - y_2 + \frac{y_1Fr_1^2}{2} \left(1 - \frac{y_1^2}{y_2^2}\right) \quad (13-74)$$

一個水躍的能量線示於圖 13-40 中。能量線在跨過水躍的下降代表與此水躍有關的水頭損失。

當給定 Fr_1 與 y_1 時，下游的流動深度 y_2 與水頭損失 h_L 分別可用式 (13-72) 與 (13-74) 計算出來。將 h_L 相對於 Fr_1 畫出來會揭露當 $Fr_1 < 1$ 時 h_L 變成負的，這是不可能的（這對應到一個負的熵產生，將會違反熱力學第二定律）。因此我們結論水躍要能夠產生，上游的流動必須是超臨界的 ($Fr_1 > 1$)。換言之，次臨界流不能夠產生水躍。這類似於氣體的流動要產生震波必須是超音速的（馬赫數大於 1）。

水頭損失是經由內部流體摩擦所產生的機械能耗散的一個量度，且水頭損失通常是不被喜歡的，因為它代表機械能的浪費。但是有時候水躍會與水壩的靜水池或溢洪道一起設計，目的是儘可能地消耗機械能來最小化水的機械能以降低其造成損害的能力。其作法是先轉換高壓力成為高速度來產生超臨界流，然後允許流體在其崩潰與減速時攪動，並消耗其動能的一部分，因此水躍性質的一個量測是其能量耗散的比例大小。

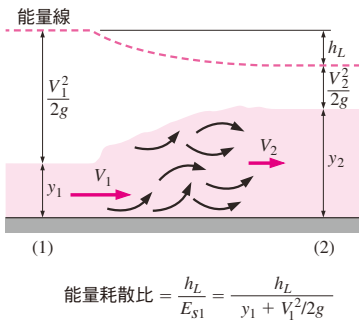


圖 13-41 能量耗散比代表在一個水躍中機械能耗散的比例。

液體在水躍之前的比能量是 $E_{s1} = y_1 + V_1^2/2g$ 。因此能量耗散比(圖 13-41) 被定義為

$$\text{能量耗散比} = \frac{h_L}{E_{s1}} = \frac{h_L}{y_1 + V_1^2/2g} = \frac{h_L}{y_1(1 + Fr_1^2/2)} \quad (13-75)$$

能量耗散比的範圍從弱水躍 ($Fr_1 < 2$) 的幾個百分比到強水躍 ($Fr_1 > 9$) 的 85% 左右。

不像氣體流動的正震波，其發生是在一個截面上並具有可忽略的厚度，但水躍通常發生在一段可觀的渠道長度上。在實際關注的福勞數範圍，被觀察到的水躍長度約為下游流動深度 y_2 的 4 到 7 倍。

實驗研究指出水躍可以分成五類如表 13-4 所示，主要相依於上游福勞數 Fr_1 。若 Fr_1 稍大於 1，液體在水躍時稍微上升，製造出駐波。在 Fr_1 更大一點時，產生出高度破壞性的振盪波。最希望的福勞數範圍是 $4.5 < Fr_1 < 9$ ，會產生穩定且高度

表 13-4 水躍的分類

上游 Fr_1	深度比 y_2/y_1	能量耗散比	描述	表面形狀
< 1	1	0	水躍不可能。違反熱力學第二定律。	
1-1.7	1-2	$< 5\%$	波狀水躍 (或駐波)。表面高度微升，低能量耗散。接近 $Fr = 1.7$ 時，發展出表面滾動。	
1.7-2.5	2-3.1	5-15%	弱水躍。表面平滑地上升，帶有滾動。低能量耗散。	
2.5-4.5	3.1-5.9	14-45%	振盪水躍。振盪是由底部進入的噴束產生大型波浪，可以傳播數英哩並破壞土堤。設計靜水池時必須避免。	
4.5-9	5.9-12	45-70%	穩定水躍。穩定、高度平衡，並對下游條件不敏感。密集的旋渦運動與在水躍內有高水平的能量耗散。設計所推薦的範圍。	
> 9	> 12	70-85%	強水躍。險惡並斷斷續續。能量耗散很有效，但與其它設計比較，可能是不經濟的，因水波高度相當高。	

來源：美國填海工程局 (1955)。

平衡的穩定波，在水躍內具有高水平的能量耗散。大於 $Fr_1 > 9$ 的水躍產生險惡的波。深度比 y_2/y_1 稍微大於 1 時產生溫和的波狀水躍 (undular jump)，且其表面高度稍微上升，深度比大於 12 時產生險惡的強力水躍，其水位有高度的上升。

在本節中，我們的考慮只針對寬的水平矩形渠道，其邊際與重力效應可以忽略。非矩形及傾斜渠道的水躍行為類似，但是流動特性，也就是深度比、水頭損失、水躍長度與耗散比是不同的。

例題 13-8 水躍

水從一個水閘門排入一個 10 m 寬的矩形水平渠道中，並被觀察到經歷一個水躍。水躍之前的流動深度與速度分別是 0.8 m 與 7 m/s。

試求 (a) 水躍之後的流動深度與福勞數，(b) 水頭損失與能量耗散比，與 (c) 由於水躍所浪費的功率製造能力 (圖 13-42)。

解答：在水平渠道中的水在指定深度與速度下經歷了一個水躍。要決定在水躍之後的深度與福勞數、水頭損失與耗散比與浪費的功率能力。

假設：1. 流動是穩定或近似穩定的。2. 渠道足夠寬，故邊際效應可以忽略。

性質：水的密度是 1000 kg/m^3 。

解析：(a) 水躍之前的福勞數是

$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{7 \text{ m/s}}{\sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2)(0.8 \text{ m})}} = 2.50$$

其值大於 1。因此水躍前流動的確是超臨界的。水躍之後的流動深度、速度與福勞數為

$$y_2 = 0.5y_1(-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2}) = 0.5(0.8 \text{ m})(-1 + \sqrt{1 + 8 \times 2.50^2}) = 2.46 \text{ m}$$

$$V_2 = \frac{y_1}{y_2}V_1 = \frac{0.8 \text{ m}}{2.46 \text{ m}}(7 \text{ m/s}) = 2.28 \text{ m/s}$$

$$Fr_2 = \frac{V_2}{\sqrt{gy_2}} = \frac{2.28 \text{ m/s}}{\sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2)(2.46 \text{ m})}} = 0.464$$

注意在水躍之後流動深度變 3 倍，而福勞數減小成約 1/5 倍。

(b) 水頭損失從能量方程式決定為

$$\begin{aligned} h_L &= y_1 - y_2 + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = (0.8 \text{ m}) - (2.46 \text{ m}) + \frac{(7 \text{ m/s})^2 - (2.28 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} \\ &= 0.572 \text{ m} \end{aligned}$$

水躍之前水的比能量與耗散比為

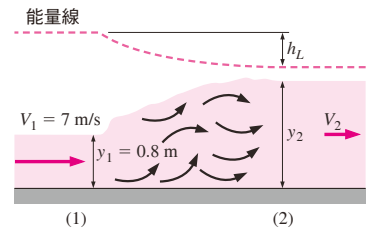


圖 13-42 例題 13-8 的示意圖。

$$E_{s1} = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = (0.8 \text{ m}) + \frac{(7 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} = 3.30 \text{ m}$$

$$\text{耗散比} = \frac{h_L}{E_{s1}} = \frac{0.572 \text{ m}}{3.30 \text{ m}} = \mathbf{0.173}$$

因此，液體可用的水頭 (或機械能) 的 17.3% 被浪費了 (轉變成熱能)，原因是水躍產生的摩擦效應。

(c) 水的質量流率是

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = \rho b y_1 V_1 = (1000 \text{ kg/m}^3)(0.8 \text{ m})(10 \text{ m})(7 \text{ m/s}) = 56,000 \text{ kg/s}$$

對應一個 0.572 m 的水頭損失的功率耗散大小為

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{dissipated}} &= mgh_L = (56,000 \text{ kg/s})(9.81 \text{ m/s}^2)(0.572 \text{ m}) \left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2} \right) \\ &= 314,000 \text{ N}\cdot\text{m/s} = \mathbf{314 \text{ kW}} \end{aligned}$$

討論：結果顯示水躍是高度的耗散過程，此例中浪費了 314 kW 的功率產生能力。因此，如果水被分流到一個水力輪機來代替從水閘門排放，至多可以產生 314 kW 的功率。但是這個潛力被轉換成無用的熱能，而不是有用的功率，造成水溫上升，

$$\Delta T = \frac{\dot{E}_{\text{dissipated}}}{\dot{m}c_p} = \frac{314 \text{ kJ/s}}{(56,000 \text{ kg/s})(4.18 \text{ kJ/kg}\cdot^\circ\text{C})} = 0.0013^\circ\text{C}$$

注意一個 314 kW 的電阻式加熱器會對 56,000 kg/s 的水流率造成相同的溫升。

13-9 流動控制與量測

管道及流道中的流率是用各種閘來控制的。然而，在明渠中的液體流動並沒受到侷限，因此流動是用部分阻塞渠道來控制的。其作法是允許流體從障礙物之上或之下流過。若障礙物允許流體從其上面流過，稱為堰 (weir) (圖 13-43)。若障礙物底部有可調整的門口並允許液體流過其底部，稱為底流閘門 (underflow gate)。這些裝置可以用來控制通過渠道的流率並加以量測。

底流閘門

有許多種底流閘門可以用來控制流率，每種都有一些優點與缺點。底流閘門位於牆壁、壩或明渠的底部。兩種常用的這種閘門是水閘門 (sluice gate) 與滾筒式閘門 (drum gate)，如圖 13-44 所示。水閘門一般是垂直的，並使用一個平的表面，而滾筒式閘門則有圓形的截面，並具有流線型的表面。

當閘門部分打開時，上游液體在朝向閘門接近時加速，在閘門達到臨界速度，並在通過閘門以後繼續加速至超臨界流的速度。因此，底流閘門就類似於氣體動力學中的收縮-擴張噴嘴。從一個底流閘門的排水，如果液體噴束直接從閘門流出到大氣中則稱為自由流出 (free outflow) (圖 13-44a)，而若是排出的液體逆流回來並淹沒了液體噴束，則稱為沉沒出口 (drowned or submerged outflow) (圖 13-44b)。在沉沒流中，流體噴束經歷一個水躍，因此下游的流動是次臨界的。同時沉沒出口包括高水平的紊流與逆流，因此有很大的水頭損失 h_L 。

對於通過底流閘門，具有自由或沉沒出口的流動，其流動深度-比能量的圖示於圖 13-45。注意對於摩擦效應可以忽略的理想閘門，其比能量維持為常數 (從點 1 到點 2a)，但對實際的閘門則減小。下游對於一個自由出口是超臨界的 (點 2b)，但對一個沉沒出口則是次臨界的 (點 2c)，因為沉沒出口會經過一個水躍變成次临界流，這將包含可觀的混合與能量耗散。

將摩擦效應近似成可忽略的並假設上游 (或貯水槽) 速度很小，使用伯努利方程式可以證明自由噴束 (free jet) 的排出速度是 (細節參考第 5 章)

$$V = \sqrt{2gy_1} \quad (13-76)$$

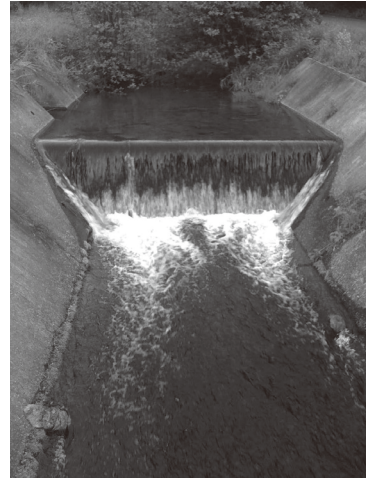
用一個排放係數 (discharge coefficient) C_d 來修正此關係式，就可以把摩擦效應考慮在內。因此閘門的排放速度與流率變成

$$V = C_d \sqrt{2gy_1} \quad \text{且} \quad \dot{V} = C_d ba \sqrt{2gy_1} \quad (13-77)$$

其中 b 與 a 分別是閘門開口的寬度與高度。



(a)



(b)

圖 13-43 堰是控制流動的裝置，水流從此種障礙物的上面流過。
(a) © Design Pics RF/The Irish Image Collection/Getty RF; (b) Photo courtesy of Bryan Lewis.

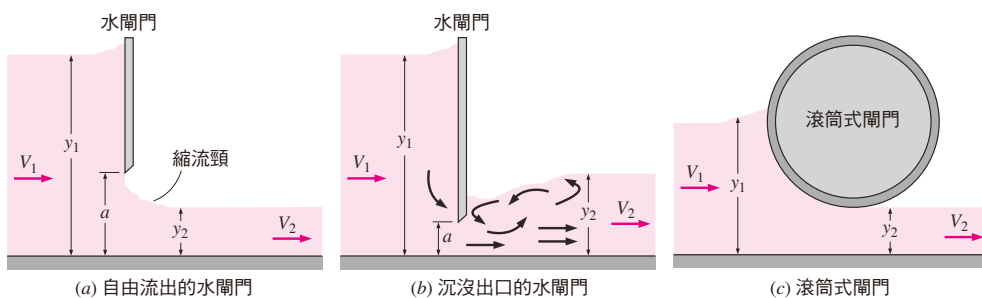


圖 13-44 用來控制流率的底流閘門的一般形式。

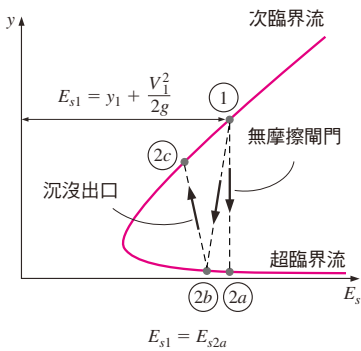


圖 13-45 通過底流閘門的流動的示意圖與流動深度-比能量圖。

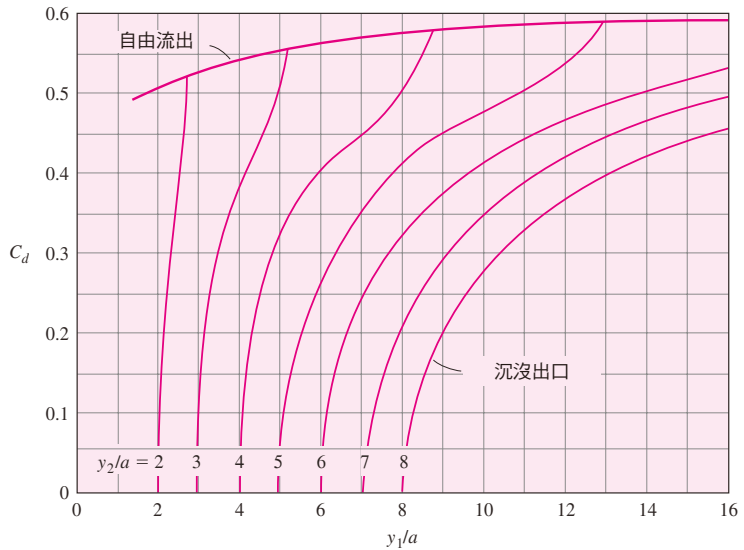


圖 13-46 底流閘門的自由出口與沉沒出口的排放係數。

Data from Henderson, *Open Channel Flow, 1st Edition*, © 1966. Reprinted by permission of Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.

對於理想的流動，排放係數 $C_d = 1$ ，但對實際通過閘門的流動 $C_d < 1$ 。實驗決定的底流閘門的 C_d 值被畫在圖 13-46 中，表示成收縮係數 y_2/a 與高度比 y_1/a 的函數。注意垂直水閘門的自由出口的 C_d 值的範圍大多數介於 0.5 與 0.6 之間。對於沉沒出口， C_d 值如預期的急速下降，並且在相同的上游條件時流率減小了。對一個給定的 y_1/a 的值， C_d 值隨 y_2/a 增加而減小。

例題 13-9 有沉沒出口的水閘門

水從一個 3 m 深的水庫排放，通過一個在渠道底部有 0.25 m 高的開口的水閘門進入一個 6 m 寬的明渠中。在所有紊流都平息後的流動深度為 1.5 m。試決定排放率（圖 13-47）。

解答：水從一個水庫中被排放，經過一個水閘門進入一條明渠中。對於指定的流動深度，要決定排放率。

假設：1. 流動在平均上是穩定的。2. 渠道足夠寬使得邊際效應可以忽略。

解析：深度比 y_1/a 與收縮係數 y_2/a 為

$$\frac{y_1}{a} = \frac{3 \text{ m}}{0.25 \text{ m}} = 12 \quad \text{與} \quad \frac{y_2}{a} = \frac{1.5 \text{ m}}{0.25 \text{ m}} = 6$$

對應的排放係數從圖 13-46 決定為 $C_d = 0.47$ ，因此排放率變成

$$\dot{V} = C_d b a \sqrt{2gy_1} = 0.47(6 \text{ m})(0.25 \text{ m})\sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(3 \text{ m})} = 5.41 \text{ m}^3/\text{s}$$

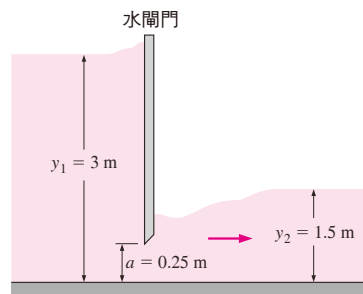


圖 13-47 例題 13-9 的示意圖。

討論：在自由流的情況下，排放係數將會是 $C_d = 0.59$ ，而對應的流率是 $6.78 \text{ m}^3/\text{s}$ 。因此當出口被沉沒時，流率可觀地下降了。

溢流閘門

在一條明渠的任何截面上，其液體的總機械能可以用水頭表示為 $H = z_b + y + V^2/2g$ ，其中 y 是流動深度， z_b 是渠道底面的高度，而 V 是平均流速。在可忽略摩擦效應的流動中 (水頭損失 $h_L = 0$)，總機械能維持為常數，而明渠流中在上游截面 1 與下游截面 2 之間的一維的能量方程式可以寫成

$$z_{b1} + y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_{b2} + y_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad \text{or} \quad E_{s1} = \Delta z_b + E_{s2} \quad (13-78)$$

其中 $E_s = y + V^2/2g$ 是比能量且 $\Delta z_b = z_{b2} - z_{b1}$ 是水流在截面 2 的底面相對於在截面 1 的底面的高度。因此在一個下坡流動中液體流的比能量增加了 $|\Delta z_b|$ (注意對於向下傾斜的渠道， Δz_b 是負的)，對於上坡流動則減少 Δz_b ，而對於水平流則維持為常數。(如果摩擦效應不可忽略，則所有情況比能量都減少 h_L 。)

對一個等寬度 b 的渠道，在穩定流時， $\dot{V} = A_c V = byV$ 且 $V = \dot{V}/A_c$ ，因此比能量變成

$$E_s = y + \frac{\dot{V}^2}{2gb^2y^2} \quad (13-79)$$

對在具有常數寬度 b 的渠道中的穩定流，其比能量 E_s 隨著深度 y 變化的圖重繪於圖 13-48 中。此圖極有價值因為它顯示出流動中能夠允許的狀態。一旦在一個流動截面 1 的上游條件被指定了，在截面 2 的液體的狀態在一個 E_s - y 圖上必須落在通過點 1 的比能量曲線的一點上。

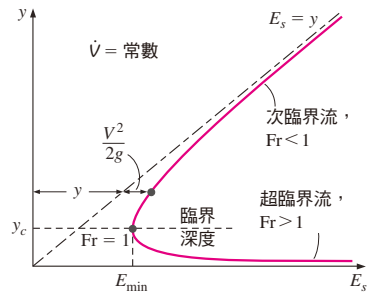


圖 13-48 一個等寬度的渠道，在一個指定流率下，比能量 E_s 隨著深度 y 的變化關係。

通過隆起且摩擦可以忽略的流動

現在考慮在一個等寬度 b 的水平渠道中，通過一個高度 Δz_b 的凸起物的穩定流動，其摩擦力可以忽略，如圖 13-49 所示。這種情況的能量方程式，從式 (13-78)，可得

$$E_{s2} = E_{s1} - \Delta z_b \quad (13-80)$$

因此，液體的比能量在其流過一個凸起物時減小了 Δz_b ，並且液體的狀態，在 E_s - y 圖中向左移動了 Δz_b ，如圖 13-49 所示。對一個有大寬度的渠道，質量守恆方程式

為 $y_2 V_2 = y_1 V_1$ ，因此 $V_2 = (y_1/y_2)V_1$ 。流過凸起物的液體的比能量可以被表示為

$$E_{s2} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad \rightarrow \quad E_{s1} - \Delta z_b = y_2 + \frac{V_1^2 y_1^2}{2g y_2^2} \quad (13-81)$$

重新整理

$$y_2^3 - (E_{s1} - \Delta z_b)y_2^2 + \frac{V_1^2}{2g} y_1^2 = 0 \quad (13-82)$$

這是 y_2 的一個 3 次多項式，因此有 3 個解。捨棄負號的解，在凸起物上方的流動深度似乎有兩個解。

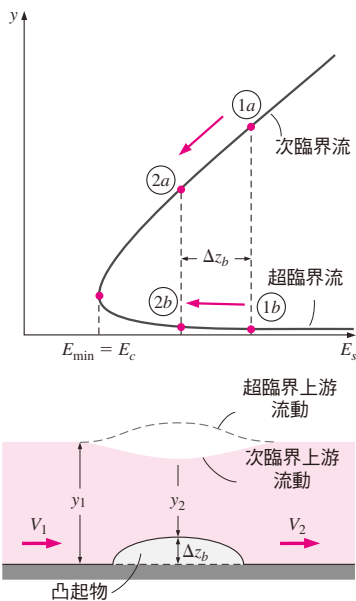


圖 13-49 流過一個凸起物的流動深度-比能量圖；給次臨界與超臨界的上游流動。

現在好奇的問題是，凸起物上方的液體高度會上升或下降？我們的直覺會以為整個液體會跟隨凸起物，因此液體表面在凸起物上方會上升，但實際上未必如此。注意，比能量是流動深度與動能水頭的加總，哪一種情節都是可能的，端視速度如何改變。圖 13-49 的 E_s - y 圖給我們確定的答案如果凸起物之前的流動是次臨界的 (狀態 1a)，流動深度 y_2 減小 (狀態 2a)。若流動深度的減小量大於凸起物高度 (即 $y_1 - y_2 > \Delta z_b$)，則自由表面被壓低了。但若流動在接近凸起物時是超臨界的 (狀態 1b)，流動深度在凸起物上面會上升 (狀態 2b)，在自由表面上造成一個凸起。

若渠道有一個深度 Δz_b 的凹坑，而不是一個凸起，情況就會相反：這種情況的比能量會增加 (在 E_s - y 圖上狀態 2 會在狀態 1 的右邊)，因為 Δz_b 是負的。因此，若接近流是次臨界的，流動深度增加；若接近流是超臨界的，則流動深度減小。

現在，讓我們再考慮流過一個凸起物的流動，摩擦力可以忽略，如之前討論過的。當凸起的高度 Δz_b 增加時，點 2 (不管是次臨界流的 2a 或超臨界流的 2b) 在 E_s - y 圖上持續地向左移動，直到最後達到臨界點。也就是當凸起高度是 $\Delta z_c = E_{s1} - E_{sc} = E_{s1} - E_{\min}$ 時，凸起上面的流動是臨界的，並且液體的比能量達到其最低的水平。

我們心中想到的問題是，若凸起高度再被增加時會發生什麼呢？液體的比能量是否繼續減小？這個問題的答案是很響亮的“不”，因為液體已經在其最低的能量水平，且其能量不能進一步減小。換言之，液體已經在 E_s - y 圖上的最左邊的點上，沒有更左邊的點可以滿足質量、能量與動量的守恆方程式。因此，流動必須維持為臨界的。這種情況的流動被稱為“阻塞” (Choked) 了。在氣體動力學中，這類似於在收縮噴嘴中的流動，當背壓被降低時氣流加速。當背壓達到臨界壓力時，

氣流在噴嘴的出口達到音速。但是不論背壓如何再被降低，噴嘴出口速度維持在音速的水平。這裡一樣，流動被“阻塞”了。

寬頂堰

流過高凸起的水流的討論可以總結如下：流過在一個明渠中的一個足夠高的障礙物的水流總是臨界的。這種被故意放置在一個明渠中用來量測流率的障礙物稱為堰 (weirs)。因此，一個足夠寬的堰上的流速是臨界速度，可以被表示為 $V = \sqrt{gy_c}$ ，其中 y_c 是臨界深度。因此流過一個寬度 b 的堰的流率被表示為

$$\dot{V} = A_c V = y_c b \sqrt{gy_c} = bg^{1/2} y_c^{3/2} \quad (13-83)$$

寬頂堰 (broad-crested weir) 是一個矩形塊，高度 P_w 、長度 L_w ，有一個水平的頂部，臨界流發生在其上 (圖 13-50)。上游高於堰的頂部平面的水頭稱為堰水頭 (weir head) 並用 H 表示。為了得到一個用堰水頭 H 表示的臨界深度 y_c 的關係式，我們對忽略摩擦的流動寫出一個上游截面與在堰上面的一個截面之間的能量方程式

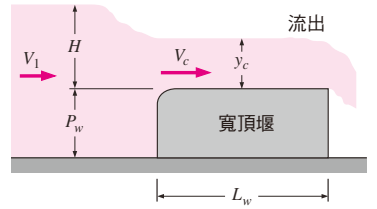


圖 13-50 在一個寬頂堰上的流動。

$$H + P_w + \frac{V_1^2}{2g} = y_c + P_w + \frac{V_c^2}{2g} \quad (13-84)$$

從兩邊消去 P_w 並代入 $V_c = \sqrt{gy_c}$ ，得到

$$y_c = \frac{2}{3} \left(H + \frac{V_1^2}{2g} \right) \quad (13-85)$$

代入式 (13-83) 中，對這個忽略摩擦的理想流動的情況，流率被決定為

$$\dot{V}_{\text{ideal}} = b \sqrt{g} \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \left(H + \frac{V_1^2}{2g} \right)^{3/2} \quad (13-86)$$

這個關係式顯示出流率與流動參數之間的函數相依關係，但是因為它沒有考慮到摩擦效應而高估流率約幾個百分比。這個效應一般用一個實驗決定的堰流係數 (weir discharge coefficient) C_{wd} 來修正理論關係式 (13-86) 成為

寬頂堰：

$$\dot{V} = C_{wd, \text{broad}} b \sqrt{g} \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \left(H + \frac{V_1^2}{2g} \right)^{3/2} \quad (13-87)$$

其中寬頂堰的合理正確的堰流係數可以從下式得到 (Chow, 1959)

$$C_{wd, broad} = \frac{0.65}{\sqrt{1 + H/P_w}} \quad (13-88)$$

更正確但比較複雜的 $C_{wd, broad}$ 的關係式也可以從文獻中獲得 (如 Ackers, 1978)。同時，上游速度 V_1 通常很小，可以被忽略。特別是在高堰中情況更是如此。因此流率被近似為

具有低 V_1 的寬頂堰：

$$\dot{V} \cong C_{wd, broad} b \sqrt{g} \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} H^{3/2} \quad (13-89)$$

應該永遠記住使用式 (13-87) 到 (13-89) 的基本要求是堰之上必須建立起臨界流，這將對堰長度 L_w 加上一些限制。如果堰太長 ($L_w > 12H$)，壁面剪應力主宰並造成堰上的流動變成是次臨界的；如果堰太短 ($L_w < 2H$)，液體可能無法加速至臨界速度。根據觀察，寬邊堰的適當長度是 $2H < L_w < 12H$ 。注意，對一個流動太長的堰，對另一個流動可能太短，要看堰水頭 H 的值而定。因此，必須先知道流率的範圍才能選擇一個堰。

銳緣堰

一個銳緣堰 (sharp-crested weir) 是放置於渠道中的一個垂直平板，強迫液體流過一個開口來量測流率。堰的形式特徵決定於開口的形狀。一個具有平直上緣的垂直細平板被稱為矩形堰因為在其上方的流動截面是矩形的；一個具有三角形開口的堰則被稱為三角堰等等。

上游流動是次臨界的且在其接近堰時變成臨界的。液體持續加速並以像自由噴束的超臨界流排出。加速的原因是自由表面高度的穩定下降，並將高度水頭轉換成速度水頭。以下所給出的流率關係式是根據液體經過堰的自由溢水，稱為水舌 (nappe)，從堰排出所得到的。清空水舌之下的空間來確保其下的大氣壓力可能是必要的。也可得到沉沒堰的經驗關係式。

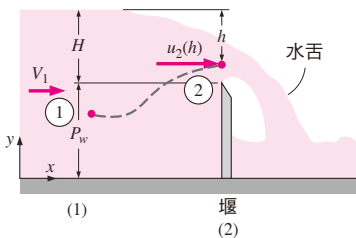


圖 13-51 通過銳緣堰上方的流動。

考慮液體流過放置在一個水平渠道的銳緣堰的流動，如圖 13-51 所示。為了簡單起見，堰上游的流速在一個垂直截面 1 上被近似為幾乎是常數。此上游液體的總能量被表示為相對於渠道底面的水頭時即為比能量，這是流動深度與速度水頭的加總，即 $y_1 + V_1^2/2g$ ，其中 $y_1 = H + P_w$ 。堰上方的流動並不是一維的。因為在通過堰上方時，液體的速度與方向都有很大的改變。但是水舌內的壓力是大氣的。

一個堰上方液體速度變化的簡單關係式的獲得是假設摩擦力可以忽略，並寫出在上游流動中的一點 (點 1) 與堰上方 (距離上游液體高度的垂直距離 h) 的一點之間

的伯努利方程式，

$$H + P_w + \frac{V_1^2}{2g} = (H + P_w - h) + \frac{u_2^2}{2g} \quad (13-90)$$

消去共同項並解出 u_2 ，堰上方理想化後的速度分佈是

$$u_2 = \sqrt{2gh + V_1^2} \quad (13-91)$$

事實上，當堰上的液體開始其自由溢水時（上方的拉下效應），液體表面會下降一些，並且在堰上緣的流動分離進一步窄化了水舌（底部的收縮效應）。結果，堰上方的流動高度遠小於 H ，當拉下與收縮效應為了簡單起見而被忽略時，流率的獲得是將流速與微分流動面積的乘積對整個流動面積作積分，

$$\dot{V} = \int_{A_c} u_2 dA_{c2} = \int_{h=0}^H \sqrt{2gh + V_1^2} w dh \quad (13-92)$$

其中 w 是流動面積在離上游自由表面垂直距離 h 處的寬度。

一般而言， w 是 h 的函數。但對一個矩形堰， $w = b$ ，是一個常數。因此積分可以被輕易地執行，使矩形堰上的流率在忽略摩擦力且忽略拉下與收縮效應的理想流動情況下，可以被決定為

$$\dot{V}_{\text{ideal}} = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left[\left(H + \frac{V_1^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{V_1^2}{2g} \right)^{3/2} \right] \quad (13-93)$$

當堰高度遠大於堰水頭時 ($P_w \gg H$)，上游速度很小使得上游速度水頭可以被忽略，即 $V_1^2/2g \ll H$ 。因此，

$$\dot{V}_{\text{ideal, rec}} \cong \frac{2}{3} b \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (13-94)$$

因此，流率可以從兩個幾何量的知識來決定：頂面寬度 b 與堰水頭 H ，這是堰頂面與上游自由表面之間的垂直距離。

這個簡化分析給出流率關係式的一般形式，但是它需要被修正來考慮到摩擦與表面張力效應，這些扮演著次要角色，也要考慮到拉下與收縮效應。再者，這是藉著將理想流率關係式乘以一個用實驗決定的排放係數 C_{wd} 做到的。因此銳緣矩形堰的流率可以被表示為

銳緣矩形堰：

$$\dot{V}_{\text{rec}} = C_{\text{wd, rec}} \frac{2}{3} b \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (13-95)$$

其中，從 Ref. 1 (Ackers, 1978)，

$$C_{wd, rec} = 0.598 + 0.0897 \frac{H}{P_w} \quad \text{for} \quad \frac{H}{P_w} \leq 2 \quad (13-96)$$

此公式適用於範圍寬廣的雷諾數，定義為 $Re = V_1 H / \nu$ 。更精確但也更複雜的相關式也可以在文獻中找到。注意式 (13-95) 適用於全寬度的矩形堰。如果堰的寬度小於渠道寬度使得流動被迫收縮，就應該包括一個修正的收縮係數來適當地考慮到這個影響。

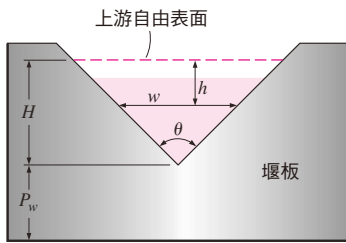


圖 13-52 一個三角形 (或 V 形) 銳緣堰的幾何。視角是從下游看向上游。

另一種經常會用來作流量量測的銳緣堰是三角形堰 (也稱為 V 形堰)，示於圖 13-52 中。三角形堰的優點是即使對小流率也維持一個高的堰水頭 H ，因為當堰水頭 H 減小時流動面積跟著減小，因此它可被用來正確的量測一個比較寬的流率範圍。

從幾何上考量，V 形寬度可以被表示為 $w = 2(H - h) \tan(\theta/2)$ 。其中 θ 是 V 形的角度。代入式 (13-92) 中並作積分，會得到給三角形堰的理想流率為

$$\dot{V}_{ideal, tri} = \frac{8}{15} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{2g} H^{5/2} \quad (13-97)$$

其中我們再次忽略上游的速度水頭。摩擦與其它耗散效應也再一次將理想的流率乘以一個堰排水係數來方便地加以考慮。因此一個三角形銳緣堰的流率變成

三角形銳緣堰：

$$\dot{V} = C_{wd, tri} \frac{8}{15} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{2g} H^{5/2} \quad (13-98)$$

其中 $C_{wd, tri}$ 的值一般是介於 0.58 到 0.62 之間。因此流體摩擦、流動面積收縮與其它耗散效應導致 V 形堰的流率相對於理想情況約減小了 40%。在許多實際的情況 ($H > 0.2$ m 且 $45^\circ < \theta < 120^\circ$)，堰的排水係數的值約 $C_{wd, tri} = 0.58$ 。更精確的值在文獻中可以找到。

例題 13-10 流過凸起的次臨界流

在一個寬的水平明渠中的水流碰到在渠道底面的一個 15 cm 高的凸起物。如果在凸起之前的流動深度是 0.80 m 且速度是 1.2 m/s，試決定凸起上的水面是否凹下了 (圖 13-53)。若是如此，凹下多少？

解答：在一個水平明渠中的水流遇到一個凸起。要決定凸起上的水面是否凹下。

假設：1. 流動是穩定的。2. 忽略摩擦效應，所以沒有機械能的耗散。3. 渠道足夠寬所以沒有邊際效應。

解析：上游福勞數與臨界深度為

$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{1.2 \text{ m/s}}{\sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2)(0.80 \text{ m})}} = 0.428$$

$$y_c = \left(\frac{V^2}{gb^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{(by_1 V_1)^2}{gb^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{y_1^2 V_1^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\frac{(0.8 \text{ m})^2 (1.2 \text{ m/s})^2}{9.81 \text{ m/s}^2}\right)^{1/3} = 0.455 \text{ m}$$

因為 $Fr < 1$ ，流動是次臨界的，因此在凸起上的流動深度減小。
上游比能量為

$$E_{s1} = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = (0.80 \text{ m}) + \frac{(1.2 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} = 0.873 \text{ m}$$

凸起上的流動深度如下決定

$$y_2^3 - (E_{s1} - \Delta z_b)y_2^2 + \frac{V_1^2}{2g}y_1^2 = 0$$

代入，

$$y_2^3 - (0.873 - 0.15 \text{ m})y_2^2 + \frac{(1.2 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)}(0.80 \text{ m})^2 = 0$$

或

$$y_2^3 - 0.723y_2^2 + 0.0470 = 0$$

使用一個方程式求解器，此方程式的三個根被決定為 0.59 m、0.36 m 與 -0.22 m。

我們捨棄負值解，因其為物理不可能的。我們也去除 0.36 m 的解，因其小於臨界深度，只能發生在超臨界流中，突起上的深度的唯一有意義的解是 $y_2 = 0.59 \text{ m}$ 。因此突起上的水面與渠道底面的距離是 $\Delta z_b + y_2 = 0.15 + 0.59 = 0.74 \text{ m}$ ，此值小於 $y_1 = 0.80 \text{ m}$ 。凸起上水面的凹下量為

$$\text{凹下量} = y_1 - (y_2 + \Delta z_b) = 0.80 \text{ m} - (0.59 + 0.15) = 0.06 \text{ m}$$

討論：注意雖然 $y_2 < y_1$ ，但並不一定指示水面是凹下的（它有可能在凸起上是隆起的）。只有當 $y_1 - y_2$ 的差值大於凸起高度 Δz_b ，凸起上的水面才是凹下的。同時，凹下的實際值可能不同於 0.06 m，因為此分析中忽略了摩擦效應。

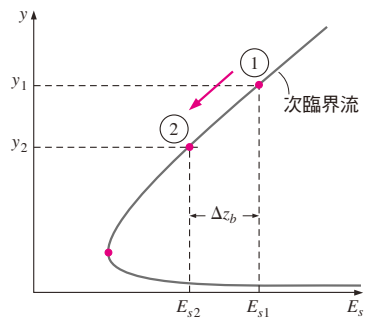
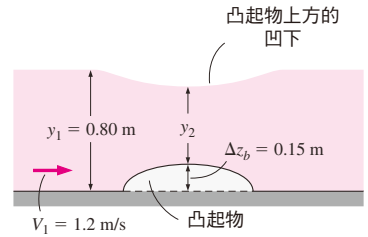


圖 13-53 例題 13-10 的示意圖與流動深度-比能量圖。

例題 13-11 用堰量測流率

在一個 5 m 寬的水平明渠中的水流率要用一個等寬度、高度 0.60 m 的銳緣矩形堰來量測。如果上游的水深為 1.5 m，試決定水的流率（圖 13-54）。

解答：一個具有銳緣矩形堰的水平明渠的上游水深被量測到，要決定流率。

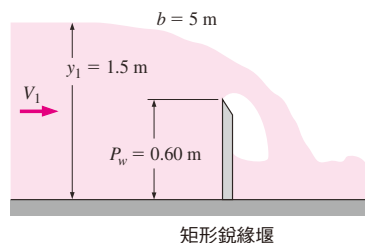


圖 13-54 例題 13-11 的示意圖。



假設：1. 流動是穩定的。2. 忽略上游的速度水頭。3. 渠道夠寬可以忽略邊際效應。

解析：堰水頭是

$$H = y_1 - P_w = 1.5 - 0.60 = 0.90 \text{ m}$$

堰的排水係數是

$$C_{\text{wd, rec}} = 0.598 + 0.0897 \frac{H}{P_w} = 0.598 + 0.0897 \frac{0.90}{0.60} = 0.733$$

因為 $0.9/0.6 = 1.5$ ，滿足條件 $H/P_w < 2$ 。通過渠道的水流率變成

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\text{rec}} &= C_{\text{wd, rec}} \frac{2}{3} b \sqrt{2gH}^{3/2} \\ &= (0.733) \frac{2}{3} (5 \text{ m}) \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(0.90 \text{ m})}^{3/2} \\ &= 9.24 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

討論：上游速度與上游速度水頭為

$$V_1 = \frac{\dot{V}}{by_1} = \frac{9.24 \text{ m}^3/\text{s}}{(5 \text{ m})(1.5 \text{ m})} = 1.23 \text{ m/s} \quad \text{與} \quad \frac{V_1^2}{2g} = \frac{(1.23 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} = 0.077 \text{ m}$$

這是堰水頭的 8.6%，其影響是顯著的。當考慮上游速度水頭時，流率變成 $10.2 \text{ m}^3/\text{s}$ ，這比求得值高約 10%。因此考慮上游速度水頭是好的作法，除非堰高度 P_w 相對於堰水頭 H 是非常大時。

應用聚焦燈 —— 橋梁挖蝕

訪問作者：Peggy A. Johnson，賓州州立大學

橋梁挖蝕是美國橋梁損壞最常見的原因 (Wardhana and Hadipriono, 2003)。橋梁挖蝕是溪流或河流中在一座橋梁附近的河道的侵蝕，包括橋墩與橋座周圍的侵蝕與對整個河床的侵蝕與降低。橋梁基礎附近的侵蝕已經是美國的水道中近乎 400,000 座橋梁損壞的主要因素。一些最近的損壞案例，可能是由在河流中橋梁附近的高流量所造成的，這說明了問題的嚴重性。在 1993 年發生在上密西西比與下密蘇里的河流盆地的洪水中，28 座橋梁損壞中至少有 22 座是由於挖蝕，造成至少 800 萬美元的損害成本 (Kamojjala et al., 1994)。在 2010 年發生在田納西州的“超級洪水”期間至少 30 個郡被發佈為主要災區，田納西河的洪水造成 587 座橋梁的挖蝕與堤岸侵蝕，並導致多於 50 座橋梁被關閉。在 2011 年的秋天，在中大西洋與美國東北部的颶風艾琳 (Irene) 與熱帶風暴李 (Lee) 造成洪水氾濫，並由於挖蝕導致許多橋梁的損壞與受損。

橋墩挖蝕的機制已經在實驗室中並用電腦模型加以研究。主要機制被認為是由於在洪水期間橋墩所造成的“馬蹄形”渦旋造成的逆向壓力梯度驅動一部分的來流在橋墩之間向下流動所致



圖 13-55 聖地牙哥附近的一座橋墩在河道中水流強大時所發展出來的挖蝕凹洞。

Photo by Peggy Johnson, Penn State, used by permission.

(Arneson et al., 2012)。挖蝕洞的侵蝕率直接與向下流的強度大小有關，而這是與河川來流的速度直接有關的。強烈的渦旋將沉澱物從凹洞中舉起，並沉積在下游的尾流渦旋中。結果形成在橋墩上游很深的凹洞，可導致橋梁基礎變得不穩定。

保護河川中的橋墩對抗洪水的損害仍然是全美各州主要的挑戰。渠道中的洪水力量強大足以搬動沉積物與岩石；傳統的保護法，例如消波塊，通常並不足夠。有很多研究使用導葉及類似的結構，在河流的流道中來幫助引導水流繞過橋墩與橋座，並提供平滑的轉向，使水流很順地流過橋的開口 (Johnson et al., 2010)。

參考文獻

- Arneson, L. A., L. W. Zevenbergen, P. F. Lagasse, P. E. Clopper (2012). Hydraulic Engineering Circular 18, Evaluating Scour at Bridges. Federal Highway Administration Report FHWA-HIF-12-003, HEC-18, Washington, D.C.
- Johnson, P. A., Sheeder, S. A., Newlin, J. T. (2010). Waterway transitions at US bridges. *Water and Environment Journal*, 24 (2010), 274–281.
- Kamojjala, S., Gattu, N. P. Parola. A. C., Hagerty, D. J. (1994), “Analysis of 1993 Upper Mississippi flood highway infrastructure damage,” in ASCE Proceedings of the First International Conference of Water Resources Engineering, San Antonio, TX, pp. 1061-1065.
- Wardhana, K., and Hadipriono, F. C., (2003). 17(3). ASCE Journal of Performance of Constructed Facilities, 144-150.



圖 13-56 賓州中部的一座橋梁。1996 年的一次 50 年洪水在橋的基礎附近所造成的挖蝕。在一座新橋被設計期間，一座暫時的金屬橋被放置在這個開口上。

Photo by Peggy Johnson, Penn State, used by permission.

總結

明渠流指的是液體在一個對大氣開放的渠道中或在一個部分填滿的流道中的流動。如果流動深度 (或平均速度) 維持為常數，渠道中的流動就是均勻的；否則，流動就是非均勻的或變速的。水力半徑定義為 $R_h = A_c/p$ 。無音次福勞數定義為

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL_c}} = \frac{V}{\sqrt{gy}}$$

若 $Fr < 1$ ，流動被分類為次臨界的；若 $Fr = 1$ ，則被分類為臨界的；若 $Fr > 1$ ，則是超臨界的。臨界流的流動深度稱為臨界深度，並被表示為

$$y_c = \frac{\dot{V}^2}{gA_c^2} \quad \text{或} \quad y_c = \left(\frac{\dot{V}^2}{gb^2} \right)^{1/3}$$

其中 b 是寬渠道的渠道寬度。

一個表面擾動在深度 y 的液體中移動的速度稱為波速 c_0 ，可以表示為 $c_0 = \sqrt{gy}$ 。液體在一個渠道中的總機械能可以用水頭表示為



$$H = z_b + y + \frac{V^2}{2g}$$

其中 z_b 是高度水頭， $P/\rho g = y$ 是壓力水頭，而 $V^2/2g$ 是速度水頭。壓力與動力水頭的加總稱為比能量 E_s ，

$$E_s = y + \frac{V^2}{2g}$$

質量守恆方程式是 $A_{c1}V_1 = A_{c2}V_2$ 。能量方程式被表示為

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + S_0L = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L$$

其中 h_L 是水頭損失，而 $S_0 = \tan \theta$ 是渠道底面斜率。摩擦斜率被定義為 $S_f = h_L/L$ 。

均勻流的流動深度稱為正常深度 y_n ，而其平均速度稱為均勻流速度 V_0 。均勻流的速度與流率為

$$V_0 = \frac{a}{n} R_h^{2/3} S_0^{1/2} \quad \text{與} \quad \dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2}$$

其中 n 是曼寧係數，其值相依於渠道表面的粗糙度，而 $a = 1 \text{ m}^{1/3}/\text{s} = (3.2808 \text{ ft})^{1/3}/\text{s} = 1.486 \text{ ft}^{1/3}/\text{s}$ 。若 $y_n = y_c$ ，流動是均勻臨界流，且底面斜率 S_0 等於臨界斜率 S_c ，表示為

$$S_c = \frac{gn^2 y_c}{a^2 R_h^{4/3}} \quad \text{其可簡化成} \quad S_c = \frac{gn^2}{a^2 y_c^{1/3}}$$

這是薄層流動或在一個寬的矩形渠道 $b \gg y_c$ 中的流動。

最好的水力截面是具有最大水力半徑的明渠，或是對於一個給定的截面積，有最小溼邊周長的渠道。矩形渠道的最好水力截面的準則是 $y = b/2$ 。梯形渠道的最好截面是六角形的一半。

在漸變流中 (GVF)，流動深度隨著往下游的距離緩慢而平滑地改變。表面形狀 $y(x)$ 是藉著積分 GVF 方程式來計算的：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - \text{Fr}^2}$$

在急變流中 (RVF)，流動深度在流動方向的一個相當短的距離有很顯著的改變。任何從超臨界到次臨界的流動的改變是通過一個水躍發生的，這是一個高度耗散的過程。水躍過程中的深度比 y_2/y_1 、水頭損失與能量耗散比可以被表示為

$$\frac{y_2}{y_1} = 0.5(-1 + \sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2})$$

$$h_L = y_1 - y_2 + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$$

$$= y_1 - y_2 + \frac{y_1 Fr_1^2}{2} \left(1 - \frac{y_1^2}{y_2^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{耗散比} &= \frac{h_L}{E_{s1}} = \frac{h_L}{y_1 + V_1^2/2g} \\ &= \frac{h_L}{y_1(1 + Fr_1^2/2)} \end{aligned}$$

一個允許液體流過它的障礙物，稱為一個堰，而一個障礙物其底部具有可調整的開口來允許液體從其底端流過的，稱為底流閘門。通過水閘門的流率被給定如下：

$$\dot{V} = C_d b a \sqrt{2g y_1}$$

其中 b 與 a 是閘門開口的寬度與高度，而 C_d 是排水係數，被用來考慮摩擦效應。

一個寬頂堰是一個矩形塊，其有一個水平的頂面讓臨界流可以在其上發生。其上游高於堰的頂面的水頭高度，稱為堰水頭， H 。流率被表示為

$$\dot{V} = C_{\text{wd, broad}} b \sqrt{g} \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \left(H + \frac{V_1^2}{2g} \right)^{3/2}$$

其中排水係數是

$$C_{\text{wd, broad}} = \frac{0.65}{\sqrt{1 + H/P_w}}$$

一個銳緣矩形堰的流率被表示為

$$\dot{V}_{\text{rec}} = C_{\text{wd, rec}} \frac{2}{3} b \sqrt{2g} H^{3/2}$$

其中

$$C_{\text{wd, rec}} = 0.598 + 0.0897 \frac{H}{P_w} \quad \text{當} \quad \frac{H}{P_w} \leq 2$$

一個銳緣三角形堰的流率被表示為

$$\dot{V} = C_{\text{wd, tri}} \frac{8}{15} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{2g} H^{5/2}$$

其中 $C_{\text{wd, tri}}$ 的值一般介於 0.58 與 0.62 之間。

明渠流分析一般被用來設計衛生下水道系統、灌溉系統、疏洪道與水壩。一些明渠流在第 15 章中用計算流體力學 (CFD) 來作分析。



參考資料和建議讀物

1. P. Ackers et al. *Weirs and Flumes for Flow Measurement*. New York: Wiley, 1978.
2. B. A. Bakhmeteff. *Hydraulics of Open Channels*. New York: McGraw-Hill, 1932.
3. M. H. Chaudhry. *Open Channel Flow*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1993.
4. V. T. Chow. *Open Channel Hydraulics*. New York: McGraw-Hill, 1959.
5. R. H. French. *Open Channel Hydraulics*. New York: McGraw-Hill, 1985.
6. F. M. Henderson. *Open Channel Flow*. New York: Macmillan, 1966.
7. C. C. Mei. *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. New York: Wiley, 1983.
8. U. S. Bureau of Reclamation. "Research Studies on Stilling Basins, Energy Dissipaters, and Associated Appurtenances," Hydraulic Lab Report Hyd.-399, June 1, 1955.

習題

有“C”題目是觀念題，學生應儘量作答。

分類、福勞數與波速

- 13-1C** 在一個明渠流中沿著自由表面壓力是如何變化的？
- 13-2C** 考慮在一個明渠中的穩定完全發展流，其截面是矩形的，底面有 5° 的常數斜率。其自由表面的斜率是否也是 5° ？解釋之。
- 13-3C** 什麼造成一個明渠中的流動是變速的 (或非均勻的)？急變流與漸變流是如何區別的？
- 13-4C** 什麼是一個明渠中流動的驅動力？明渠中的流率是如何建立的？
- 13-5C** 在明渠中均勻流與非均勻流是如何區別的？在哪一種渠道中均勻流會被觀察到？
- 13-6C** 已知平均流速與流動速度，解釋你如何決定明渠中的流動是平靜的、臨界的或迅速的。
- 13-7C** 一個明渠中的流動被觀察到經歷一個水躍。這個水躍上游的流動是否必定是超臨界的？這個水躍下游的流動是否必定是次臨界的？
- 13-8C** 什麼是明渠流中的臨界深度？對一個已知
- 的平均流速，它是如何決定的？
- 13-9C** 什麼是福勞數？它是如何定義的？它的物理意義是什麼？
- 13-10** 海中地震中的一個強震啟動了一個單一波浪。取平均水深為 2 km 與海水密度為 $1,030 \text{ kg/m}^3$ ，試決定這個波的傳播速度。
- 13-11** 考慮水在一個寬渠道中的流動。試決定在流動中一個小擾動的傳播速度，如果流動深度是 (a) 25 cm 與 (b) 80 cm。如果流體是油，你的答案是什麼？
- 13-12** 水在 15°C 以 1.5 m/s 的平均速度均勻地在一個 2 m 寬的矩形渠道中流動。如果水深是 24 cm，試決定流動是次臨界的或是超臨界的。(Answer: 次臨界)
- 13-13** 下大雨後，水在混凝土表面上以平均速度 1.3 m/s 流動。若水深是 2 cm，試決定流動是次臨界的或超臨界的。
- 13-14** 水在 20°C 以 1.5 m/s 的平均速度在一個寬的矩形渠道中流動。如果水深是 0.16 m，試決定 (a) 此流動是層流還是紊流，及 (b) 此流動是次臨界的或超臨界的。
- 13-15** 水在 10°C 以 2.5 m/s 的平均速度在一個半滿的 3 m 直徑的圓形渠道中流動。試決定

水力半徑、雷諾數與流動狀態 (層流或紊流)。

13-16 對 2 m 直徑的渠道，重做習題 13-15。

13-17 水在 20°C 以 2 m/s 的平均速度在一個部分填滿的 3 m 直徑圓形渠道中流動。如果最大的水深是 0.75 m，試決定水力半徑、雷諾數與流動狀態。

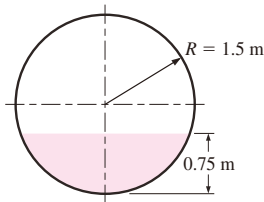


圖 P13-17

比能量與能量方程式

13-18C 考慮水以相同的流率在兩個相同的矩形明渠中的穩定流動。如果在一個渠道中的流動是次臨界的，而在另一個渠道中的是超臨界的。水在這兩個渠道中的比能量可以是相同的嗎？解釋之。

13-19C 在一個明渠中流動的流體的比能量是如何用水頭定義的？

13-20C 考慮液體在一個寬矩形渠道中的穩定流動。當摩擦損失被忽略時，流動的能量線被宣稱是平行於渠道底面的。你同意嗎？

13-21C 考慮在一個寬的矩形渠道中的穩定一維流動。有人宣稱在一個截面的自由表面上的流體總機械能等於流體在相同截面的渠道底面上的總能量。你同意嗎？解釋之。

13-22C 流體在一個寬矩形渠道中的穩定一維流動中，其總機械能是如何用水頭表示的？它與流體的比能量是如何相關的？

13-23C 在明渠流中將一維的能量方程式在上游截面 1 與下游截面 2 之間表示出來，並解釋如何決定水頭損失。

13-24C 對一個已知流率的明渠，研究其比能量與

流動深度的關係。一個人宣稱流體的比能量當流動是臨界時會是最小的，但另一個人宣稱當流動是次臨界時，比能量才是最小的。你的意見是什麼呢？

13-25C 考慮水的穩定的超臨界流以等流率通過一個矩形明渠，一個人宣稱水的流動深度越大，比能量越大。你同意嗎？解釋之。

13-26C 在通過一個矩形截面的明渠的穩定且均勻的流動中，一個人宣稱流體的比能量維持為常數。第二個人宣稱由於摩擦效應所造成的水頭損失，比能量沿流動方向減小。你會同意哪一人的說明呢？解釋之。

13-27C 摩擦斜率是如何定義的？在什麼條件下，它會等於明渠的底面斜率？

13-28 水在 15°C 以 6 m/s 的平均速度在一個水深 0.4 m 的矩形渠道中流動。試決定 (a) 臨界深度，(b) 替代深度，與 (c) 最小比能量。

13-29 水在 10°C 以 12 m³/s 的流率在一個 6 m 寬的矩形渠道中流動，其深度為 0.55 m。試求 (a) 臨界深度，(b) 流動是次臨界或超臨界的，與 (c) 替代深度。(Answer: (a) 0.742 m, (b) 超臨界的, (c) 1.03 m)

13-30 水在 18°C 以 6 m/s 的平均速度在一個寬矩形渠道中流動，水深 42 cm。試求 (a) 福勞數，(b) 臨界深度，與 (c) 流動是次臨界或超臨界的。若流動深度是 6 cm，你的回答會是什麼呢？

13-31 對一個 3 m/s 的平均速度，重做習題 13-30。

13-32 水以流率 0.7 m³/s 穩定地在一個 1.4 m 寬的矩形渠道中流動。如果流動深度是 0.40 m，試決定流速，並決定流動是次臨界或超臨界的。同時若流動的特性要做改變，決定其替代深度。

13-33 水在 20°C 以 4 m/s 的平均速度及 0.4 m 的深度在一個矩形渠道中流動。試決定水的

比能量及流動是次臨界或超臨界的。

- 13-34** 水以 $60 \text{ m}^3/\text{s}$ 的流率在一個半滿的六角形渠道中流動，其底部寬為 2 m 。試決定 (a) 平均速度與 (b) 流動是次臨界或超臨界的。
- 13-35** 對一個 $30 \text{ m}^3/\text{s}$ 的流率，重做習題 13-34。
- 13-36** 水以 2.8 m/s 的平均速度在一個半滿的 50 cm 直徑的鋼製渠道中流動。試決定體積流率與流動是次臨界或超臨界的。
- 13-37** 水以 5 m/s 的平均速度在一個 2 m 寬的矩形渠道中流動。若流動是臨界的，試決定水的流率。(Answer: $25.5 \text{ m}^3/\text{s}$)

均勻流與最好的水力截面

- 13-38C** 一個明渠中的流動什麼時候被稱為均勻的？在什麼條件下明渠中的流動會維持是均勻的？
- 13-39C** 哪一個對一個明渠是較好的水力截面：有較小的或較大的水力半徑？
- 13-40C** 哪一個對一個明渠是最好的水力截面：(a) 圓形，(b) 矩形，(c) 梯形，或 (d) 三角形？
- 13-41C** 一個有最好的水力截面的矩形明渠的流體高度是其渠道寬度的 (a) 一半，(b) 2 倍，(c) 相等，或 (d) $1/3$ 。
- 13-42C** 一個底寬度 b 的梯形渠道有最好的水力截面，其流動截面的邊長是 (a) b ，(b) $b/2$ ，(c) $2b$ ，或 (d) $\sqrt{3}b$ 。
- 13-43C** 在一個明渠的均勻流中，有人宣稱水頭損失可以將底面斜率乘以渠道長度來簡單的決定。這件事可以這樣簡單嗎？解釋之。
- 13-44C** 考慮經過一個寬矩形渠道的均勻流。如果底面斜率增加，流動深度會 (a) 增加，(b) 減小，或 (c) 維持常數。
- 13-45** 考慮均勻流通過內部鋪磚塊的明渠，其曼寧係數 $n = 0.015$ 。若由於藻類在表面生

長導致曼寧係數倍增 ($n = 0.030$)，但流動截面維持為常數，則流率會 (a) 倍增，(b) 減小為 $1/\sqrt{2}$ ，(c) 維持不變，(d) 減小一半，或 (e) 減小為 $1/2^{1/3}$ 。

- 13-46** 水在一個半滿的 2 m 直徑的圓形渠道中均勻地流動，渠道在坡度為 1.5 m/km 的地表上。如果渠道是由精製混凝土建造的，試決定水的流率。
- 13-47** 水均勻地在一個精製混凝土建造的梯形截面的渠道中流動，渠道底面寬度 0.8 m ，梯形角度 50° ，而底面角度為 0.4° 。若量測到的流動深度為 0.52 m ，試決定水經過渠道的流率。

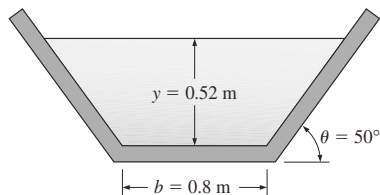


圖 P13-47

- 13-48** 一個 1 m 直徑的半圓形渠道由粗製混凝土做成，要用來均勻地輸送水經過 1.5 km 。如果渠道滿水時的流率要達到 $4 \text{ m}^3/\text{s}$ ，試求經過渠道的最小高度差。
- 13-49** 在明渠的均勻流中，流速與流率的決定可以從曼寧方程式表示為 $V_0 = (a/n) R_h^{2/3} S_0^{1/2}$ 與 $\dot{V} = (a/n) A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2}$ 。在這些方程式中常數 a 用 SI 單位表示的值和因次是什麼呢？同時，當摩擦因子 f 已知時，解釋曼寧係數 n 是如何決定的。
- 13-50** 證明均勻的臨界流，對 $b \gg y_c$ 的薄層流動，一般的臨界斜率關係式 $S_c = \frac{gn^2 y_c}{a^2 R_h^{4/3}}$ 化簡成 $S_c = \frac{gn^2}{a^2 y_c^{1/3}}$ 。
- 13-51** 一個梯形渠道，底面寬度 6 m ，自由表面寬度 12 m ，且流動深度 2.2 m ，以流率 $120 \text{ m}^3/\text{s}$ 排水。若渠道的表面鋪設瀝

青 ($n = 0.016$)，試決定每 km 渠道的高度降。(Answer: 5.61 m)

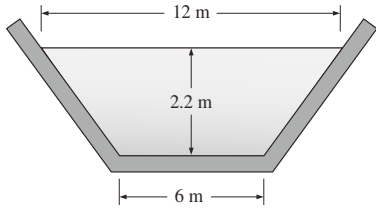


圖 P13-51

13-52 重新考慮習題 13-51。若渠道可以容許的最大流動高度是 3.2 m，試決定通過渠道的最大流率。

13-53 考慮水流過兩個相同的矩形截面 $4\text{ m} \times 4\text{ m}$ 的渠道。現在結合兩個渠道，形成一個 8 m 寬的渠道。流率被調整成流動深度維持為 4 m。試決定結合兩個渠道後，流率增加的百分比。

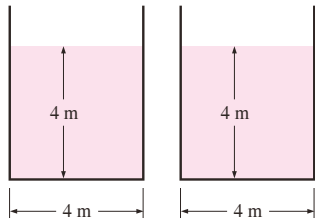


圖 P13-53

13-54 一個鑄鐵的 V 形水流渠道，示於圖 P13-54，具有 0.5° 的底面斜率。當中心的流動深度為 0.75 m，試決定均勻流的排水率。(Answer: $1.03\text{ m}^3/\text{s}$)

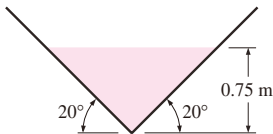


圖 P13-54

13-55 一個乾淨泥土的梯形渠道，其底面寬 1.8 m 且邊牆坡度為 1:1，要用來以流率 $8\text{ m}^3/\text{s}$ 均勻地排水經過 1 km 的距離。如果

流動深度不能超過 1.2 m，試決定需要的高度差。(Answer: 3.90 m)

13-56 一個有 0.0025 的常數斜率的排水系統要用精製混凝土製成的三個圓形渠道建造而成。其中兩個渠道的直徑為 1.8 m，並且其排水都進入第三個渠道中。如果所用渠道在運作時都是半滿的，並且交接位置的損失可以忽略，試決定第三個渠道的直徑。(Answer: 2.33 m)

13-57 水在一個渠道中流動，其底面斜率是 0.002，截面如圖 P13-57 所示。不同次區域的截面尺寸與表面的曼寧係數也在圖上給出。試決定通過渠道的流率與渠道的等效曼寧係數。

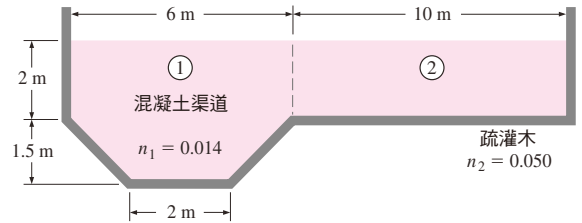


圖 P13-57

13-58 一個 2 m 內部直徑的圓形鋼製暴雨排水道 ($n = 0.012$) 要用來以流率 $12\text{ m}^3/\text{s}$ 均勻的排水經過 1 km 的距離。最大水流深度是 1.5 m，試決定需要的高度降。

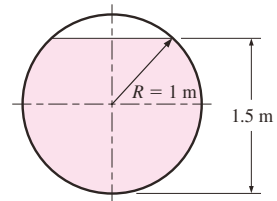


圖 P13-58

13-59 水要在一個明渠中以均勻的流率 $10\text{ m}^3/\text{s}$ 被輸送，渠道表面鋪設瀝青，底面斜率 0.0015。試決定最好截面的尺寸：若渠道的形狀是 (a) 直徑 D 的圓形，(b) 底部寬 b 的矩形，與 (c) 底部寬 b 的梯形。



- 13-60** 考慮一個表面鋪有瀝青的矩形渠道中的均勻流。其流動面積 2 m^2 且底面斜率 0.0003 ，藉著變動深寬比 y/b 從 0.1 到 2.0 ，試計算並畫出流率，並證實最好的流動截面發生在深寬比為 0.5 時。
- 13-61** 一個矩形渠道，其底面斜率 0.0004 要建造來以流率 $20 \text{ m}^3/\text{s}$ 輸送水。試決定渠道的最好的尺寸：若渠道要由 (a) 粗製混凝土與 (b) 精製混凝土建造而成。(Answer: (a) $4.93 \text{ m} \times 2.47 \text{ m}$, (b) $4.66 \text{ m} \times 2.33 \text{ m}$)
- 13-62** 對一個 $17 \text{ m}^3/\text{s}$ 的流率，重做習題 13-61。
- 13-63** 一個由粗製混凝土製成的渠道，底面斜率為 1° ，底面寬度 5 m ，且有 $1:1$ 的斜率的邊牆，如圖 P13-63 所示。若流率為 $25 \text{ m}^3/\text{s}$ ，試決定正常深度 h 。

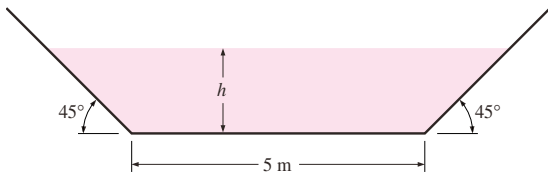


圖 P13-63

- 13-64** 對 $n=0.030$ 的長草土渠道，重做習題 13-63。

漸變流、急變流與水躍

- 13-65C** 漸變流與急變流是如何不同的？
- 13-66C** 非均勻流或變速流是如何與均勻流不同的？
- 13-67C** 有人宣稱與表面壁剪力有關的摩擦損失在分析急變流時可以忽略，但在分析漸變流時應該考慮。你同意這個聲明嗎？為你的答案辯護。
- 13-68C** 考慮水穩定地在一個上坡的矩形截面的渠道中流動。如果流動是超臨界的，在流動方向的流動深度會 (a) 增加，(b) 維持常數，或 (c) 減小。
- 13-69C** 次臨界流是否可能經歷一個水躍？解釋之。
- 13-70C** 為什麼水躍有時候會被用來消耗機械能？水躍的能量耗散比是如何定義的？
- 13-71C** 考慮水穩定地在一個矩形截面的水平渠道中的流動。如果流動是次臨界的，在流動方向的流動深度會 (a) 增加，(b) 維持常數，或 (c) 減小。
- 13-72C** 考慮水穩定在一個下坡的矩形截面的渠道中流動。如果流動是次臨界的並且流動深度大於正常深度 ($y > y_n$)，則在流動方向的流動深度會 (a) 增加，(b) 維持常數，或 (c) 減小。
- 13-73C** 考慮水穩定在一個水平的矩形截面的渠道中流動。如果流動是超臨界的，則在流動方向的流動深度會 (a) 增加，(b) 維持常數，或 (c) 減小。
- 13-74C** 考慮水穩定地在一個下坡的矩形截面的渠道中流動。如果流動是次臨界的且流動深度小於正常深度 ($y < y_n$)，則在流動方向的流動深度會 (a) 增加，(b) 維持常數，或 (c) 減小。
- 13-75** 水在一個 90° 的 V 形鑄鐵渠道中以流率 $3 \text{ m}^3/\text{s}$ 流動，底面斜率是 0.002 。試決定此流動的渠道斜率應該被分類為溫和的、臨界的或陡峭的。(Answer: 溫和的)
- 13-76** 考慮水在一個斜率 0.4° 的鋪磚寬渠道中的均勻流。若渠道被分類為陡峭的，決定其流動深度的範圍。
- 13-77** 考慮水在一個 3.5 m 寬，底面斜率 0.5° 的粗製混凝土矩形渠道中流動。如果流率是 $8.5 \text{ m}^3/\text{s}$ ，試決定此渠道的斜率是溫和的、臨界的或陡峭的。同時，若流動深度為 0.9 m ，分類當流動發展時的表面形狀。
- 13-78** 水均勻地在一個精製混凝土表面的矩形渠道中流動。渠道寬度 3 m ，流動深度

1.2 m，與底面斜率 0.002，試決定對此流動，渠道應該被分類為溫和的、臨界的或陡峭的。

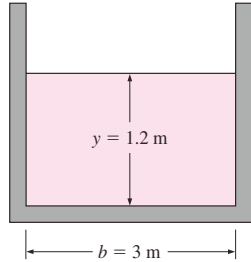


圖 P13-78

- 13-79** 水從一個水閘門排入一個 8 m 寬的水平矩形渠道中，並被觀察到經歷一個水躍。水躍之前的流動深度與流速分別是 1.2 m 與 9 m/s。試求 (a) 水躍之後的流動深度與福勞數，(b) 水頭損失與耗散比，及 (c) 水躍所消散的機械能。

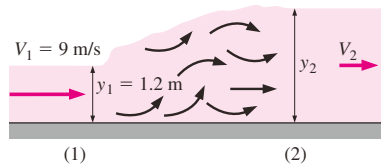


圖 P13-79

- 13-80** 考慮水在一個 10 m 寬的渠道中以流率 $70 \text{ m}^3/\text{s}$ 流動，流動深度為 0.50 m。現在水經歷一個水躍，且水躍後的流動深度經量測為 4 m。試決定這個水躍所浪費的機械能。(Answer: 4.35 MW)
- 13-81** 水在經過一個水躍以後的流動深度與速度經量測分別為 1.1 m 與 1.75 m/s。試求水躍之前的流動深度與速度，及消耗的機械能的比例。
- 13-82** 考慮水在一個寬矩形渠道中的均勻流動，其每單位寬度的流率為 $1.5 \text{ m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$ 且曼寧係數為 0.03，渠道的斜率為 0.0005。(a) 計算此流動的正常與臨界深度，並且決定此流動是次臨界的或超臨界的。(b)

其次，一個水壩被建置 (在 $x = 0$)，為的是在上游圍出一個水庫。這升高了上游的水面形狀，並創造出一個“背水”線 (圖 P13-82)。恰在水壩上游的新的水深是 2.5 m。試決定在水壩上游的水庫可以延伸多遠。你可以考慮水庫的邊界是當水深與原來均勻的水深在 5% 以內的範圍。(Answer: 3500 m)

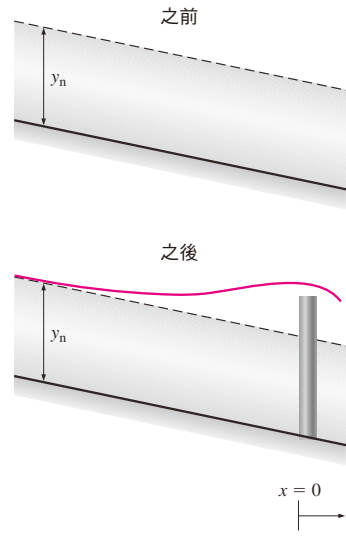


圖 P13-82

- 13-83** 水以流動深度 56 cm 在一個寬的矩形渠道中以 9 m/s 的平均速度流動，並經歷一個水躍。試求與此水躍相關的水頭損失。
- 13-84** 在一個寬渠道的一個水躍中，水流深度從 0.6 增加至 3 m。試決定水躍之前與之後的速度和福勞數，以及能量耗散比。
- 13-85** 考慮漸變流通過在一個寬渠道的突起，如圖 P13-85 所示。起始速度是 0.75 m/s，起始水流深度是 1 m，曼寧參數是 0.02，而渠道底面的高度被描述為

$$z_b = \Delta z_b \exp[-0.001(x - 100)^2]$$

其中最大的凸起高度 Δz_b 等於 0.15 m，而凸起的頂點位於 $x = 100$ 處。(a) 計算並畫出此流動的臨界深度及 (在其存在的地方)

流動的正常深度，(b) 在範圍 $0 \leq x \leq 200$ m，積分 GVF 方程式，並根據對表 13-3 分類方法的了解，對觀察到的自由表面的行為加以評論。

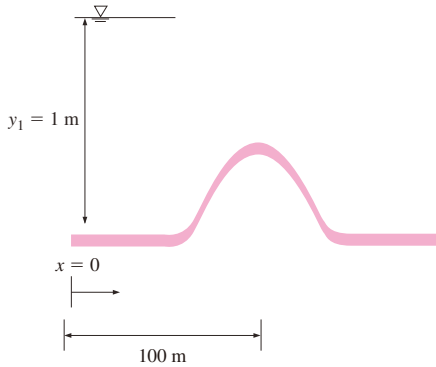


圖 P13-85

- 13-86** 考慮一個寬的矩形水渠道，其每單位寬度的流率為 $5 \text{ m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$ 而曼寧係數為 $n = 0.02$ 。這個渠道的前 100 m 長有一個 $S_{01} = 0.01$ 的斜率，後 100 m 長則有一個 $S_{02} = 0.02$ 的斜率。(a) 計算這兩個渠道段的正常與臨界深度。(b) 若起始水深為 1.25 m，計算並畫出渠道整個 200 m 長度範圍內的水面形狀，並分類這兩個渠道段 (M1、A2 等)。



圖 P13-86

- 13-87** 對一個起始水深 0.75 m (而不是 1.25 m) 的情況，重做習題 13-86。
- 13-88** 雖然 GVF 方程式不能直接用來預測水躍，但它可以和理想的水躍深度比方程式結合，目的是幫助定位水躍在渠道中的

發生位置。考慮在一個寬的 ($R_h \approx y$) 水平 ($S_0 = 0$) 實驗室引水槽 (其長度 3 m，曼寧係數 0.009) 中所創造的一個水躍。在領頭閘門下 $x = 0$ 處有一個起始深度 0.01 m 的超臨界流。在尾端閘門 $x = 3$ m 處，則導致出口水深度為 0.08 m。每單位寬度的流率為 $0.025 \text{ m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$ 。(a) 計算此流動的臨界深度，並證明起始與最後的流動分別是超臨界與次臨界的。(b) 決定水躍的位置。提示：積分 GVF 方程式 $x = 0$ 到一個水躍的“猜測”位置，應用水躍的深度比方程式，再積分 GVF 方程式使用此新的起始條件從水躍位置到 $x = 3$ m。如果你沒有得到期望的溢流深度，重試一個新的水躍位置。(Answer: 1.80 m)

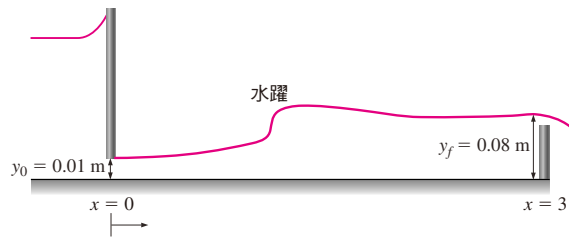


圖 P13-88

- 13-89** 考慮漸變流方程式：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}$$

對一個寬矩形渠道的情況，證明此方程式可以簡化成以下的形式，其可明顯地展示 y 、 y_n 與 y_c 之間關係的重要性：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 [1 - (y_n/y)^{10/3}]}{1 - (y_c/y)^3}$$

- 13-90** 考慮水在一個 6 m 寬的矩形渠道中的漸變流，其流率為 $8.5 \text{ m}^3/\text{s}$ ，曼寧係數為 0.008。渠道的斜率是 0.01，且在 $x = 0$ 的位置，量測到的平均流速是 1.6 m/s。決定水面形狀的類別，並且藉由數值積分

GVF 方程式，計算流動深度在 (a) $x = 150$ m，(b) 300 m，與 (c) 600 m。

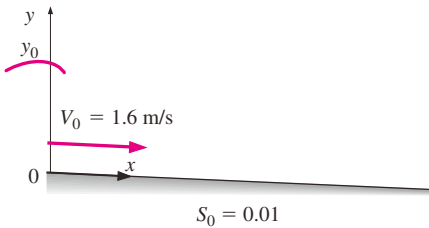


圖 P13-90

13-91 考慮水在一個寬矩形灌溉渠道中的漸變流，其每單位寬度的流率為 $5 \text{ m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$ ，斜率為 0.01，而曼寧係數為 0.02。流動起始時是在均勻的深度。在一個給定的位置， $x = 0$ ，流動進入一個 200 m 長的渠道，由於缺少維護，導致渠道的粗糙度變成 0.03，經過這段渠道以後，粗糙度回復成起始的 (有維護) 值。(a) 為這兩個不同的流段，計算流動的正常與臨界深度。(b) 用數值方法求解漸變流方程式，範圍 $0 \leq x \leq 400$ m。將你的結果畫圖 (即， y 相對 x) 並評論水面的行為。

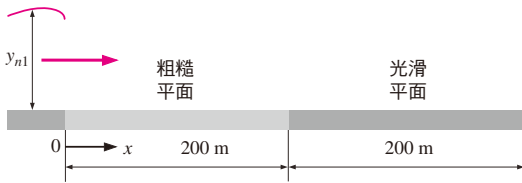


圖 P13-91

渠道中的流動控制與量測

- 13-92C** 什麼是銳緣堰？在什麼基礎上銳緣堰被分類？
- 13-93C** 寬頂堰被用來量測經過一個明渠的流率的操作的基本原理是什麼？
- 13-94C** 對一個水閘門，排水係數 C_d 是如何定義的？水閘門自由排水的 C_d 的典型值是什麼？什麼是通過此閘門的理想化的無摩擦流動的 C_d 的值？

13-95C 考慮在一個等寬度 b 的水平渠道中的穩定無摩擦的流動，通過一個高度 Δz 的凸起。當流體流過凸起時，流動深度將會增加、減小或維持著常數？假設流動是次臨界的。

13-96C 考慮在一個明渠中液體流過一個凸起的次臨界流。當凸起高度增加時，凸起上的比能量與流動深度減小。當比能量達到其最小值時，流動的特性會是什麼？若凸起高度再被增加時，流動是否會變成超臨界的？

13-97C 為流過底流閘門的水流畫一個流動深度—比能量圖，並指示通過閘門的流動。考慮以下情形：(a) 無摩擦閘門，(b) 有自由出口的水閘門，與 (c) 有沉沒出口的水閘門 (包括水躍變成次臨界流)。

13-98 考慮在一個寬的矩形渠道中的均勻水流，其深度為 2 m，是由粗製混凝土製成，其底面斜率為 0.0022。試決定每 m 渠道寬度的水流率。現在水流過一個 15 cm 高的凸起。如果在凸起上的水面維持平的 (沒有上升或下降)，試決定每米渠道寬度的排水率變化。(提示：探討凸起上平直的水面物理上是否可能。)

13-99 在一個寬渠道中流動的水流遭遇到在渠道底部的一個 22 cm 高的凸起。如果在凸起之前的水流深度是 1.2 m 且速度是 2.5 m/s，決定凸起上的流動是否阻塞了，並討論之。

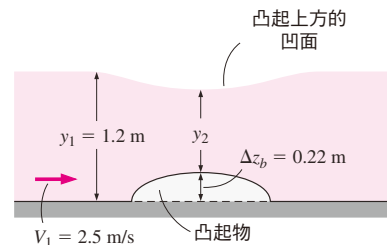


圖 P13-99

13-100 考慮水在一個寬渠道中的均勻流動，其速度為 8 m/s ，流動深度為 0.8 m 。現在水流過一個 30 cm 高的凸起。決定凸起上面水面高度的變化（增加或減小），同時決定凸起上的流動是次臨界的或超臨界的。

13-101 水從一個 12 m 深的水庫進入釋出進入一個 6 m 寬的明渠中，流動經過一個水閘門在渠道底部的一個 1 m 高的開口。如果閘門下游的流動深度經量測到為 3 m ，試決定經過閘門的排水率。

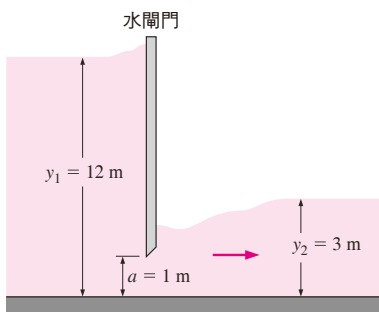


圖 P13-101

13-102 一個全寬度的銳緣堰要被用來量測在一個 2 m 寬的矩形渠道中的水流率。通過此渠道的最大流率是 $5 \text{ m}^3/\text{s}$ ，且在堰上游的流動深度不能超過 1.5 m 。試決定堰的合適高度。

13-103 在一個 10 m 寬的水平渠道中的水流率要使用一個跨過渠道的 1.3 m 高的銳緣矩形堰來量測。如果上游的水流深度是 3.4 m ，試求水流率。(Answer: $66.8 \text{ m}^3/\text{s}$)

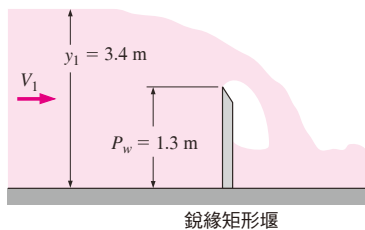


圖 P13-103

13-104 對一個 1.6 m 高的堰的情況，重做習題 13-103。

13-105 水流過一個 2 m 高的銳緣矩形堰。堰上游的水流深度是 3 m ，且從堰所排出的水流進一個相同寬度的粗製混凝土渠道中，並且在其中建立均勻流條件。如果在下游的流動中沒有水躍發生，試決定下坡渠道的最大斜率。

13-106 水要從一個 8 m 深的湖泊經過一個底部有 5 m 寬，但 0.6 m 高的開口的水閘門排水進入一個渠道。如果閘門下游的水流深度經量測為 4 m ，試決定經過此閘門的排水率。

13-107 考慮水流通過一個寬渠道，流動深度為 2.5 m 。現在水流過一個具有 0.3 m 高開口的水閘門，並且其自由地向外排出的水流隨後經歷一個水躍。忽略任何與水閘門本身有關的損失，試求水躍前後的流動深度與流速，以及在水躍中耗散的機械能的比例。

13-108 水流過一個 5 m 寬的渠道的流率要用一個高於渠道底部 0.5 m 的銳緣三角形堰來量測，其缺口角度為 80° 。如果堰上游的流動深度是 1.5 m ，試決定水流通過渠道的流率，取堰的排水係數為 0.60 。

(Answer: $1.19 \text{ m}^3/\text{s}$)

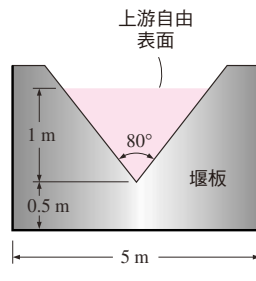


圖 P13-108

13-109 若上游的流動深度為 0.90 m ，重做習題 13-108。

13-110 一個銳緣三角形堰的缺口角度為 100° 要被用來量測從一個大湖進入一個洩洪道的排水率。如果改用一個只有一半缺口角度

($\theta = 50^\circ$) 的堰來代替，試決定流率減小的百分比。假設湖中的水深與堰的排水係數維持不變。

- 13-111** 一個 0.80 m 高的寬頂堰要被用來量測水在一個 5 m 寬的矩形渠道中的流率。在堰足夠上游處的流動深度是 1.80 m。試決定通過渠道的流率及堰上方的最小流動深度。

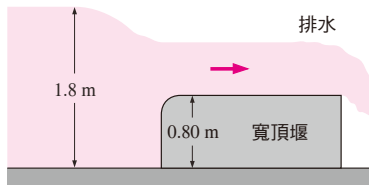


圖 P13-111

- 13-112** 對上游流動深度 1.4 m，重做習題 13-111。
- 13-113** 考慮在一個粗製混凝土製造的寬渠道的均勻水流，其斜率為 0.0022。現在水流過一個 15 cm 高的凸起。若凸起上方的流動正好是臨界的 ($Fr = 1$)，試決定凸起上方每 m 寬度的流率與流動深度。(Answer: 20.3 m³/s, 3.48 m)

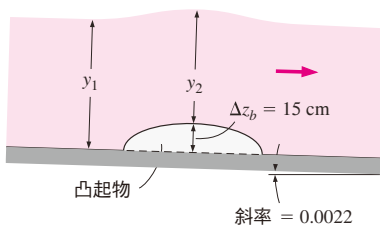


圖 P13-113

- 13-114** 考慮水流過一個 0.80 m 高，足夠長的寬頂堰。如果堰上方量測到的最小流動深度是 0.50 m，試決定每 m 渠道寬度的流率與堰上游的流動深度。
- 13-115** 水流通過一個 8 m 寬 (進入紙面方向) 的渠道的流率被一個水閘門控制。若閘門上游與下游量測到的流動深度分別是 0.9 與

0.25 m，試決定閘門下游的流率與福勞數。

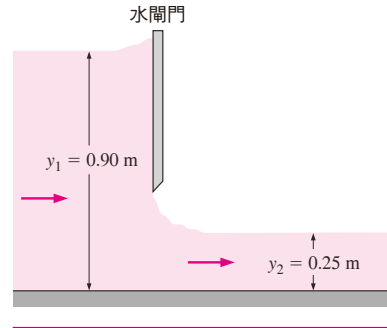


圖 P13-115

複習題

- 13-116** 水流以平均速度 4 m/s 在一條運河中流動。對流動深度：(a) 0.2 m，(b) 2 m，與 (c) 1.63 m，決定流動是次臨界或超臨界的？
- 13-117** 一個梯形渠道，底面寬度 4 m，邊牆斜率為 45°，以 18 m³/s 的流率排水。若流動深度為 0.6 m，試決定流動是次臨界或超臨界的？
- 13-118** 一個 5 m 寬的矩形渠道以精製混凝土鋪面，要設計來輸送水流，流率為 12 m³/s，傳輸距離 1 km。使用 EES (或其它) 軟體，探討底面斜率對流動深度 (因此對需要的渠道高度) 的影響。令底面角度從 0.5° 變化到 10°，增量為 0.5°。將流動深度對應底面角度列表與作圖，並討論結果。
- 13-119** 對一個底面寬度 5 m 與邊牆角度 45° 的梯形渠道，重做習題 13-118。
- 13-120** 一個以磚塊鋪面的梯形渠道，底面斜率為 0.001，底面寬度 4 m，而邊牆與水平面的角度是 25°，如圖 P13-120 所示。若量測到的正常深度是 1.5 m，試估計水經過此渠道的流率。(Answer: 22.5 m³/s)

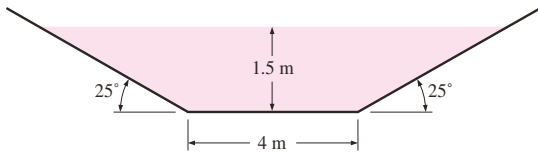


圖 P13-120

- 13-121** 水流過一個 2.2 m 寬的矩形渠道，其曼寧係數為 $n = 0.012$ 。若水是 0.9 m 深且渠道的底面斜率是 0.6° 。試求此渠道在均勻流時的排水率。
- 13-122** 一個底面寬度 7 m 的矩形渠道以流率 $45 \text{ m}^3/\text{s}$ 排水，試決定超臨界流動的最高流動深度。(Answer: 1.62 m)
- 13-123** 考慮一個由精製混凝土 ($n = 0.012$) 製成的水流渠道，內部直徑 1 m，斜率 0.002。若中心線的水流深度是 0.32 m，試求經過此渠道的水流率。(Answer: $0.258 \text{ m}^3/\text{s}$)

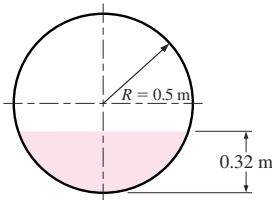


圖 P13-123

- 13-124** 重新考慮習題 13-123。當維持流動面積為常數時，藉著改變流動深度對半徑的比值 y/R 從 0.1 到 1.9 來評估流率。證明對通過圓形渠道的流動，最好的截面是當渠道是半滿時。將你的結果列表並作圖。
- 13-125** 考慮水流通過一個拋物線形缺口，如圖 P13-125 所示。為流率推導出一個關係

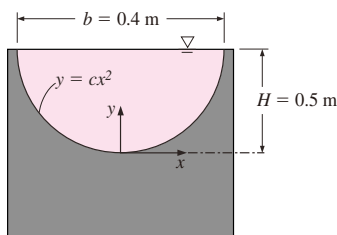


圖 P13-125

式，並對理想的情況，其速度由托利切利 (Torricellis) 方程式 $V = \sqrt{2g(H - y)}$ 給出，計算其數值。(Answer: $0.123 \text{ m}^3/\text{s}$)

- 13-126** 水在一個底面斜率 0.5° 的渠道中流動，其截面如圖 P13-126 所示。截面尺寸與不同次截面的表面的曼寧係數也同樣在圖上給出，試決定通過此渠道的流率與渠道的等效曼寧係數。

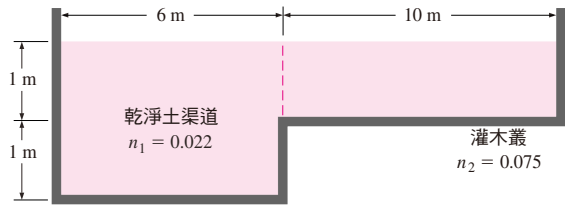


圖 P13-126

- 13-127** 考慮兩個的渠道，其中一個是底面寬為 b 的矩形，另一個是直徑 D 的圓形，兩者有相同的流率、底面斜率與表面鋪面。若矩形渠道的流動深度也是 b ，而圓形渠道則是半滿的，試決定 b 與 D 之間的關係。
- 13-128** 考慮水在一個 V 形渠道中流動。決定當流動是最有效率時，渠道面與水平面之間的夾角。

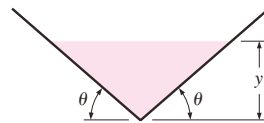


圖 P13-128

- 13-129** 在一個 6 m 寬的矩形渠道中的水流率要用一個跨過渠道，高度為 1.1 m 的銳緣矩形堰來量測。如果堰上游的水頭高於堰頂面 0.60 m，試決定其水流率。
- 13-130** 一個有粗製混凝土表面的矩形渠道要被建造來以 $6 \text{ m}^3/\text{s}$ 的流率均勻的排水。在最好的截面的情形下，決定渠道的底面寬度：若每 km 可用的垂直落差為 (a) 1 m，(b) 2

m。 (Answer: (a) 2.65 m, (b) 2.32 m)

13-131 對有最好的截面的梯形渠道的情況，重做習題 13-130。

13-132 在實務上，V 缺口經常被用來量測明渠中的流率。使用理想的托利切利方程式 $V = \sqrt{2g(H - y)}$ 給速度，推導一個用角度 θ 表示通過 V 缺口的流率關係式，同時展示流率隨 θ 的變化，藉由計算在 $\theta = 25^\circ$ 、 40° 、 60° 與 75° 的流率，並畫出結果。

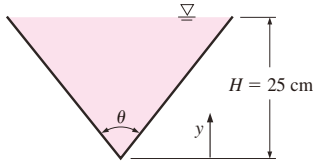


圖 P13-132

13-133 水均勻地在一個半滿的 3.2 m 直徑的圓形渠道中流動，其斜率為 0.004。如果量測到的水流率是 $4.5 \text{ m}^3/\text{s}$ ，試決定此渠道的曼寧係數與福勞數。 (Answer: 0.487, 0.319)

13-134 考慮在一個寬矩形渠道中流動的水流經歷了一個水躍。證明水躍前後的福勞數比可以用水躍前後的水流深度 y_1 與 y_2 來表示，成為

$$Fr_1/Fr_2 = \sqrt{(y_2/y_1)^3}$$

13-135 一個有自由出口的水閘門被用來控制流過一個渠道的水流率。試決定當閘門被升高至產生一個 50 cm 的開口，並且上游量測到的水流深度為 2.8 m 時每單位寬度的流率。同時決定下游的水流深度與流速。

13-136 水流過一個寬渠道，水流深度 45 cm，平均速度 8 m/s，並經歷一個水躍。試決定在水躍過程中所消耗的流體的機械能的比。 (Answer: 36.9%)

13-137 水流經過一個水閘門時經歷了一個水躍，

如圖 P13-137 所示。水在接近閘門時的速度是 1.25 m/s，而在水躍之後則是 4 m/s。試決定通過閘門的水流的每單位寬度的流率、水流深度 y_1 與 y_2 ，及水躍的能量耗散比。

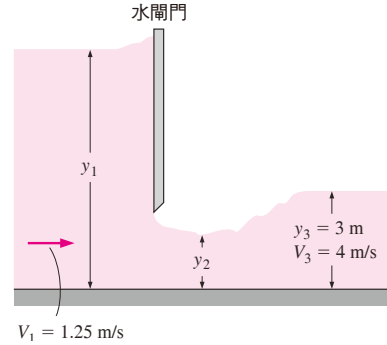


圖 P13-137

13-138 若在水躍之後的流速是 3.2 m/s，重做習題 13-137。

13-139 水從一個 5 m 深的湖泊經過一個水閘門底部的一個 0.5 m 高的開口，排水進入一個精製水泥的渠道。其底面斜率為 0.004。在建立超臨界流條件的不久之後，水流經歷一個水躍。當分析水躍時，忽略底面斜率，試決定水躍之後的水流深度、速度與福勞數。

13-140 水從一個水壩排水進入一個寬的洩洪道，以避免氾濫並減少洪水的危險。水的破壞能力的一大部分用一個水躍來破壞，其間水的深度從 0.70 m 上升至 5.0 m。試決定水躍前後的速度，與洩洪道每 m 寬度消耗的機械能。

13-141 水在一個水平的寬矩形渠道中流動，以速度 1.25 m/s 逼近一個 20 cm 高的凸起，

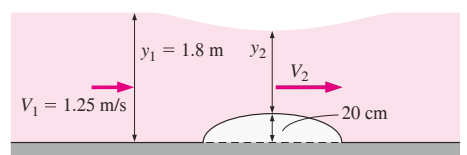


圖 P13-141



水流深度為 1.8 m。試決定凸起上方的速度、水流深度與福勞數。

- 13-142** 重新考慮習題 13-141。若凸起上方的流動是臨界的 ($Fr = 1$)，試求凸起高度。

基礎工程學 (FE) 試題

- 13-143** 哪些選項是明渠流的例子？

I. 河流中的水流
II. 高速公路雨水的排水
III. 向上氣流中的雨雪
IV. 污水管道

- (a) I 與 II
(b) I 與 III
(c) II 與 III
(d) I、II 與 IV
(e) I、II、III 與 IV

- 13-144** 如果在一個明渠流中的水流深度維持是常數，此流動稱為

- (a) 均均流 (b) 穩定流 (c) 變動流
(d) 不穩定流 (e) 層流

- 13-145** 考慮水在一個高度 2 m 與寬度 5 m 的矩形明渠中流動，水流深度是 1.5 m，此流動的水力半徑是

- (a) 0.47 m (b) 0.94 m (c) 1.5 m
(d) 3.8 m (e) 5 m

- 13-146** 水以 $7.5 \text{ m}^3/\text{s}$ 的流率在一個寬度 5 m 的矩形明渠中流動。此流動的臨界深度是

- (a) 5 m (b) 2.5 m (c) 1.5 m
(d) 0.96 m (e) 0.61 m

- 13-147** 水以 $0.25 \text{ m}^3/\text{s}$ 的流率流過一個寬度 0.6 m 的矩形明渠。如果水流深度是 0.2 m，若流動特性要改變，什麼是替代的水流深度？

- (a) 0.2 m (b) 0.26 m (c) 0.35 m
(d) 0.6 m (e) 0.8 m

- 13-148** 水以 $55 \text{ m}^3/\text{s}$ 的流率在一個 6 m 寬的矩形明渠中流動。如果水流深度是 2.4 m，福勞數是

- (a) 0.531 (b) 0.787 (c) 1.0
(d) 1.72 (e) 2.65

- 13-149** 水流過一個乾淨且平直的矩形截面的自然渠道，其底面寬度 0.75 m 且底面斜率的角度為 0.6° 。如果流動深度為 0.15 m，則水通過渠道的流率是

- (a) $0.0317 \text{ m}^3/\text{s}$ (b) $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$
(c) $0.0674 \text{ m}^3/\text{s}$ (d) $0.0866 \text{ m}^3/\text{s}$
(e) $1.14 \text{ m}^3/\text{s}$

- 13-150** 水要在一個精製混凝土渠道中以 $5 \text{ m}^3/\text{s}$ 的流率被輸送，其底面寬度為 1.2 m。渠道底面每 500 m 長度下降 1 m。在均勻流條件下渠道的最小高度是

- (a) 1.9 m (b) 1.5 m (c) 1.2 m
(d) 0.92 m (e) 0.60 m

- 13-151** 水要在一個 4 m 寬的矩形明渠中輸送。最大化流率的流動深度是

- (a) 1 m (b) 2 m (c) 4 m
(d) 6 m (e) 8 m

- 13-152** 水在一個黏土板鋪面的矩形渠道中以流率 $0.8 \text{ m}^3/\text{s}$ 被輸送。渠道底面斜率是 0.0015。渠道的最好截面寬度是

- (a) 0.68 m (b) 1.33 m (c) 1.63 m
(d) 0.98 m (e) 1.15 m

- 13-153** 水在一個黏土板鋪面的梯形渠道中以流率 $0.8 \text{ m}^3/\text{s}$ 被輸送。渠道底面的斜率是 0.0015。渠道的最好截面寬度是

- (a) 0.48 m (b) 0.70 m (c) 0.84 m
(d) 0.95 m (e) 1.22 m

- 13-154** 水在一個底面寬度 0.85 m 的精製混凝土的矩形渠道中均勻地流動。水流深度是 0.4 m 與底面斜率是 0.003。此渠道應該被分類為

- (a) 陡峭的 (b) 臨界的 (c) 溫和的
(d) 水平的 (e) 逆向的

- 13-155** 水從一個水閘門排水進入一個矩形水平渠道中並經歷一個水躍。渠道為 25 m 寬且

水躍之前的水流深度與速度分別為 2 m 與 9 m/s。水躍之後的水流深度是

- (a) 1.26 m (b) 2 m (c) 3.61 m
(d) 4.83 m (e) 6.55 m

13-156 水從一個水閘門排水進入一個矩形的水平渠道中並經歷一個水躍。水躍之前的水流深度與速度分別是 1.25 m 與 6 m/s。由於水躍造成的可用的水頭損失百分比是

- (a) 4.7% (b) 6.2% (c) 8.5%
(d) 13.9% (e) 17.4%

13-157 水從一個水閘門排水進入一個 7 m 寬的矩形的水平渠道中並經歷一個水躍。水躍之前的水流深度與速度分別是 0.65 m 與 5 m/s。由於水躍浪費的功率能力是

- (a) 158 kW (b) 112 kW
(c) 67.3 kW (d) 50.4 kW
(e) 37.6 kW

13-158 水從一個 0.8 m 深的水庫排水進入一個 4 m 寬的明渠中，排水是經過一個在渠道底部有一個 0.1 m 高的開口的水閘門進行的，水流深度在所有紊流都平息後是 0.5 m。排水率是

- (a) $0.92 \text{ m}^3/\text{s}$ (b) $0.79 \text{ m}^3/\text{s}$
(c) $0.66 \text{ m}^3/\text{s}$ (d) $0.47 \text{ m}^3/\text{s}$
(e) $0.34 \text{ m}^3/\text{s}$

13-159 在一個 3 m 寬的水平明渠中的水流率用一個等寬度的 0.4 m 高的銳緣矩形堰量測。若上游的水深是 0.9 m，則水的流率是

- (a) $1.37 \text{ m}^3/\text{s}$ (b) $2.22 \text{ m}^3/\text{s}$
(c) $3.06 \text{ m}^3/\text{s}$ (d) $4.68 \text{ m}^3/\text{s}$
(e) $5.11 \text{ m}^3/\text{s}$

設計與小論文題

13-160 使用目錄或網站，得到三個不同的堰製造商的訊息。比較不同的堰設計，並討論每種設計的優缺點，指出每種設計最適合的應用。

13-161 考慮水在一個 5 m 寬的矩形渠道的水平段中的流動，範圍從 10 至 $15 \text{ m}^3/\text{s}$ 。一個矩形或三角形的細板堰要被建置來量測流率。如果水深在所有時間都要維持在 2 m 以下，指出合適的堰的形式與尺寸。若流動範圍是 0 到 $15 \text{ m}^3/\text{s}$ ，你的回答會是什麼呢？

